1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATH B DU 23 MAI 2013
CHIMISTES, GÉOGRAPHES, PHYSICIENS ET INFORMATICIENS

Version 27 mai 2013

Exercices

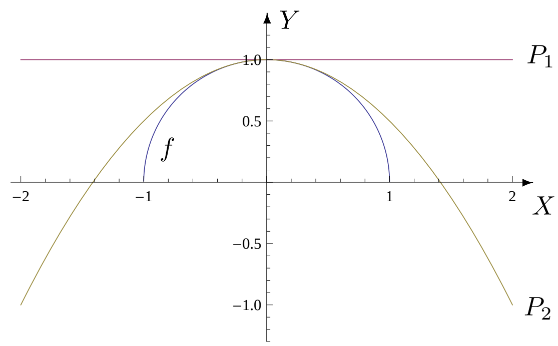
1. **On donne la fonction f par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.**
   a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2$ en 0.
   b) Dans un même repère orthonormé, représenter au voisinage de 0 le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.

   Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $]-1,1[$ et on a

   $$Df(x) = -x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}, \quad D^2f(x) = -(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} - x^2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}} = (1-x^2)^{\frac{-3}{2}}(-1+x^2-x^2) = -(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}.$$

   Comme $f(0) = 1$, $Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -1$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

   $$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

2. **a) Soient un réel a et la matrice**

   $$A = \begin{pmatrix} \mathrm{tg}(3) & 2\cos(a) \\ \sin(3) & \cos(3+\pi) \end{pmatrix}.$$

   - Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in [0, 2\pi]$ la matrice est-elle inversible ? Justifier.
   - Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.

   Solution. La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Comme $\mathrm{tg}(3) = \frac{\sin(3)}{\cos(3)}$ et $\cos(3+\pi) = -\cos(3)$, on a

   $$\det A = -\sin(3) - 2\sin(3)\cos(a) = -\sin(3)(1 + 2\cos(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

   Ainsi, comme $a \in [0, 2\pi]$, la matrice A est inversible pour tout a différent de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

   La matrice des cofacteurs de A étant égale à

   $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\cos(3) & -\sin(3) \\ -2\cos(a) & \mathrm{tg}(3) \end{pmatrix},$$

   l'inverse de A est la matrice

   $$A^{-1} = \frac{1}{\sin(3)(1 + 2\cos(a))} \begin{pmatrix} \cos(3) & 2\cos(a) \\ \sin(3) & -\mathrm{tg}(3) \end{pmatrix}, \ a \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

   et on a

   $$A.A^{-1} = \frac{1}{\sin(3)(1 + 2\cos(a))} \begin{pmatrix} \mathrm{tg}(3) & 2\cos(a) \\ \sin(3) & -\cos(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(3) & 2\cos(a) \\ \sin(3) & -\mathrm{tg}(3) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin(3)(1+2\cos(a))}\begin{pmatrix} \sin(3)+2\cos(a)\sin(3) & 2\,\mathrm{tg}(3)\cos(a)-2\,\mathrm{tg}(3)\cos(a) \\ \sin(3)\cos(3)-\sin(3)\cos(3) & 2\sin(3)\cos(a)+\sin(3) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sin(3)(1+2\cos(a))}\begin{pmatrix} \sin(3)(1+2\cos(a)) & 0 \\ 0 & \sin(3)(1+2\cos(a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Pendant les congés, une personne peut soit rester chez elle (R), soit voyager en Europe (E) soit voyager hors Europe (H). D'une année à l'autre, elle peut changer de projet de vacances de la façon suivante
- étant restée chez elle, elle a une chance sur 2 de voyager en Europe l'année suivante et une chance sur 2 de voyager hors Europe
- ayant voyagé en Europe, elle a une chance sur 3 de voyager encore en Europe l'année suivante, une chance sur 3 de voyager hors Europe et une chance sur 3 de rester chez elle
- ayant voyagé hors Europe, elle a une chance sur 4 de voyager en Europe et 3 chances sur 4 de rester chez elle.
Déterminer la matrice de transition ainsi que la probabilité qu'à long terme la personne voyage en Europe.

Solution. Soient E_0, H_0 et R_0 respectivement le type de vacances choisi l'année fixée au départ et E_1, H_1 et R_1 respectivement le type de vacances choisi un an après. On a donc

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de tansition T est

$$T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

La situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 3/4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x+3y+6z=0 \\ 2x-6y+3z=0 \\ 4x+9y-12z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x-3y+9z=0 \\ 6x+3y-9z=0 \\ 2x-6y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 2x-6y+3z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5y=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}y \\ y \\ \frac{7}{6}y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(15+12+14) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{41}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{41} \\ \frac{12}{41} \\ \frac{14}{41} \end{pmatrix}$$

et la probabilité que la personne voyage en Europe à long terme est de $15/41$.

3. **a) On donne la fonction f par**

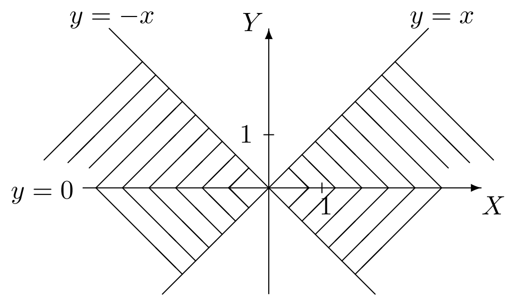
$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0,\, x^2 - y^2 > 0\right\}.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des droites d'équation cartésienne $y = 0$, $y = x$ et $y = -x$ sont exclus de l'ensemble.



-En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable et la dérivée par rapport à sa seconde variable ?

Solution. En un point de A, on a

$$D_x f(x,y) = D_Z \ln(Z)|_{Z=\sqrt{x^2-y^2}} \;.\; D_T\sqrt{T}|_{T=x^2-y^2} \;.\; D_x(x^2-y^2) + D_U \operatorname{arctg}(U)|_{U=\frac{x}{y}} \;.\; D_x\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}} \;.\; 2x + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{x^2-y^2} + \frac{y}{y^2+x^2}$$

et

$$D_y f(x,y) = D_Z \ln(Z)|_{Z=\sqrt{x^2-y^2}} \;.\; D_T\sqrt{T}|_{T=x^2-y^2} \;.\; D_y(x^2-y^2) + D_U \operatorname{arctg}(U)|_{U=\frac{x}{y}} \;.\; D_y\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}} \;.\; (-2y) + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-y}{x^2-y^2} - \frac{x}{y^2+x^2}$$

Remarque : comme $x^2 - y^2 > 0$, on peut écrire $\ln\left(\sqrt{x^2-y^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2-y^2)$, ce qui permet de calculer plus rapidement les dérivées partielles.

- En utilisant l'expression des dérivées obtenues précédemment, que vaut

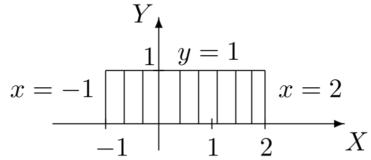
$$xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y)$$

Solution. L'expression donnée vaut donc

$$x\left(\frac{x}{x^2-y^2} + \frac{y}{y^2+x^2}\right) + y\left(\frac{-y}{x^2-y^2} - \frac{x}{y^2+x^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} = 1.$$

b) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale $\iint_E (x^2 + 2xy)\ dx\ dy$ sur $E = [-1,2]\times\ [0,1]$ et représenter l'ensemble d'intégration E en le hachurant.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration E ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur E, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_E (x^2 + 2xy)\ dx\ dy = \int_{-1}^{2} \left(\int_0^1 (x^2 + 2xy)\ dy \right)\ dx = \int_{-1}^{2} \left[x^2 y + xy^2 \right]_{y=0}^{y=1}\ dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x^2 + x\right)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

c) On considère la succession d'intégrales simples suivante

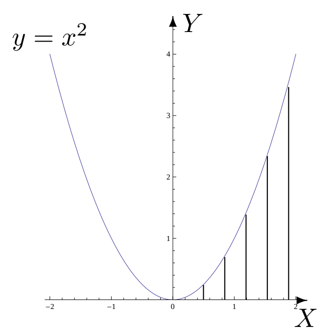
$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}\ dy \right)\ dx.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.
- Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}$ est continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - y > 0\}$ donc sur son ensemble d'intégration $A \setminus \{(0, 0)\}$ si

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in [0, x^2]\},$$

ensemble non borné dont la représentation graphique se trouve ci-dessous (partie hachurée) ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y)\ \forall (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}$.
Pour x fixé dans $]0, +\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}$ est continue sur le fermé borné $[0, x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}\ dy = \left(-e^{-x}\right)\ .\ \left[2\sqrt{5x^2 - y} \right]_0^{x^2} = 2(\sqrt{5} - 2)x\, e^{-x}.$$

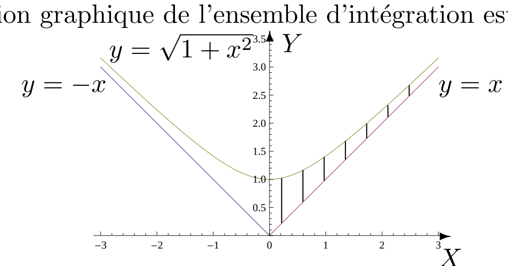
La fonction $h : x \mapsto 2(\sqrt{5} - 2)x\, e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, +\infty[$ non borné. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0, t]\ \forall t > 0$, en intégrant par parties, on a

$$\int_0^t 2(\sqrt{5} - 2)x\, e^{-x}\ dx = 2(\sqrt{5} - 2) \left([-xe^{-x}]_0^t + \int_0^t e^{-x}\ dx \right) = 2(\sqrt{5} - 2)(-te^{-t} - e^{-t} + 1)$$

Dès lors, comme
$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} (te^{-t}) = 0$$
puisque, par application du théorème de l'Hospital, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste à l'infini, on a
$$\lim_{t\to+\infty} 2(\sqrt{5}-2)(-te^{-t} - e^{-t} + 1) = 2(\sqrt{5}-2).$$
Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient
$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}\, dy \right) dx = 2(\sqrt{5}-2).$$

4. **a) On donne l'ensemble fermé non borné E suivant**
$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x, y \geq 0,\ x^2 \leq y^2 \leq 1 + x^2 \right\}.$$
- Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé en le hachurant.
- Si f est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$, exprimer la valeur de son intégrale sur E en intégrant successivment par rapport à y (resp. x) puis par rapport à x (resp. y).
- Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pourquoi ?
Solution. La représentation graphique de l'ensemble d'intégration est la suivante



L'intégrale de f sur E est donnée par
$$\iint_E f(x, y)\ dx\ dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\ dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^y f(x, y)\ dx \right) dy + \int_1^{+\infty} \left(\int_{\sqrt{y^2-1}}^{y} f(x, y)\ dx \right) dy.$$
On trouve la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration car la fonction est intégrable sur $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$ donc sur E.

b) Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme
$$(i) \ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-\pi)^m}{\pi^{2m+1}}, \qquad\qquad (ii) \ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\cos(\frac{\pi}{6}))^m}{m!}.$$

Solution. La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-\pi)^m}{\pi^{2m+1}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\displaystyle\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{\pi}\right)^m$, série géométrique convergente puisque la raison $\displaystyle\frac{-1}{\pi} \in]-1, 1[$. La somme de cette série vaut
$$\frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{-1}{\pi}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{\pi}\right)^m = \left(\frac{-1}{\pi^2}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{\pi}} = \frac{-1}{\pi(\pi+1)}.$$

La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\cos(\frac{\pi}{6}))^m}{m!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La somme de cette série vaut donc $\exp(\frac{\sqrt{3}}{2}) - 1$.