1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Corrigé de l'examen de math B du août 2013
biologistes et géologues

Version 11 juillet 2013

Exercices

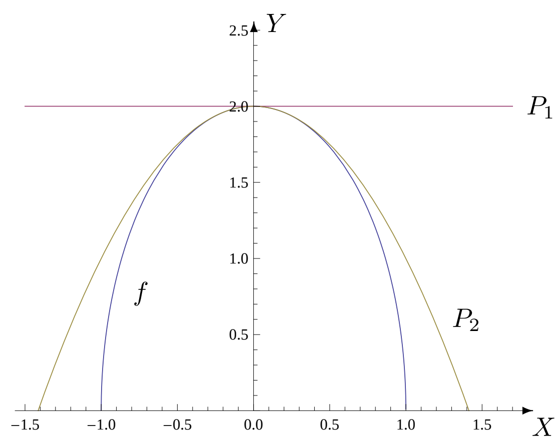
1. **On donne la fonction f par $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.**
   a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2$ en 0.
   b) Dans un même repère orthonormé, représenter (au voisinage de 0) le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.

   Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $]-1,1[$ et on a $Df(x) = -2x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ et

$$D^2f(x) = -2(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} - 2x^2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}} = 2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}(-1+x^2-x^2) = -2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}.$$

   Comme $f(0) = 2,\ Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -2$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 2, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 2 - x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$



2. **a) Soient un réel a et la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{tg}(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & \cos(a-\pi) \end{pmatrix}.$$

   - Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in [0, 2\pi]$ la matrice est-elle inversible ? Justifier.
   - Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.

   Solution. La matrice A est définie si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Comme $\mathrm{tg}(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$ et $\cos(a - \pi) = -\cos(a)$, on a

$$\det A = -\sin(a) - 2\sin(a)\cos(a) = -\sin(a)(1 + 2\cos(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq k\pi \text{ et } a \neq \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

   Ainsi, comme $a \in [0, 2\pi]$ et $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, la matrice A est inversible pour tout a différent de $0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ et 2π.

   La matrice des cofacteurs de A étant égale à

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\cos(a) & -\sin(a) \\ -2\cos(a) & \mathrm{tg}(a) \end{pmatrix},$$

   l'inverse de A est la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\sin(a)(1 + 2\cos(a))}\begin{pmatrix} \cos(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & -\mathrm{tg}(a) \end{pmatrix},\ a \in]0, 2\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

et on a

$$A.A^{-1} = \frac{1}{\sin(a)(1+2\cos(a))}\begin{pmatrix} \mathrm{tg}(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & -\cos(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & -\mathrm{tg}(a) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin(a)(1+2\cos(a))}\begin{pmatrix} \sin(a)+2\cos(a)\sin(a) & 2\,\mathrm{tg}(a)\cos(a)-2\,\mathrm{tg}(a)\cos(a) \\ \sin(a)\cos(a)-\sin(a)\cos(a) & 2\sin(a)\cos(a)+\sin(a) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin(a)(1+2\cos(a))}\begin{pmatrix} \sin(a)(1+2\cos(a)) & 0 \\ 0 & \sin(a)(1+2\cos(a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que 1 est valeur propre de B.
- Déterminer tous les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1.

Solution. Le réel 1 est valeur propre de B si et seulement si $\det(B-I)=0$. En ajoutant la troisième colonne à la deuxième puis en calculant le déterminant par application de la première loi des mineurs sur la deuxième ligne, on a successivement

$$\det(B-I) = \det\begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -3/5 & 3/5 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -3/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/5 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = (-3/5)(3/8-3/8) = 0.$$

Ainsi, 1 est bien valeur propre de B.
On pourrait aussi constater que la première colonne est égale à la somme des opposés des deux autres ($C_1 = -C_2 - C_3$) et dès lors, le déterminant est nul.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(B-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -3/5 & 3/5 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x+y+2z=0 \\ -y+z=0 \\ x-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

3. **a) On donne la fonction f par**

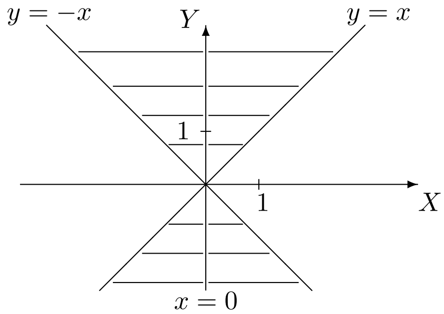
$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{y^2-x^2}\right) - \mathrm{arcotg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f est égal à

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0,\ y^2-x^2>0\right\}.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des droites d'équation cartésienne $x = 0$, $y = x$ et $y = -x$ sont exclus de l'ensemble.



-En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable et la dérivée par rapport à sa seconde variable ?

Solution. En un point de A, on a

$$D_x f(x,y) = D_Z \ln(Z)|_{Z=\sqrt{y^2-x^2}} \cdot D_T\sqrt{T}|_{T=y^2-x^2} \cdot D_x(y^2-x^2) - D_U \text{arcotg}(U)|_{U=\frac{y}{x}} \cdot D_x\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2-x^2}} \cdot (-2x) - \left(\frac{-1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-x}{y^2-x^2} - \frac{y}{x^2+y^2}$$

et

$$D_y f(x,y) = D_Z \ln(Z)|_{Z=\sqrt{y^2-x^2}} \cdot D_T\sqrt{T}|_{T=y^2-x^2} \cdot D_y(y^2-x^2) + D_U \text{arctg}(U)|_{U=\frac{y}{x}} \cdot D_y\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2-x^2}} \cdot 2y - \left(\frac{-1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{y^2-x^2} + \frac{x}{x^2+y^2}$$

Remarque : comme $y^2 - x^2 > 0$, on peut écrire $\ln\left(\sqrt{y^2-x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(y^2-x^2)$, ce qui permet de calculer plus rapidement les dérivées partielles.

- En utilisant l'expression des dérivées obtenues précédemment, que vaut

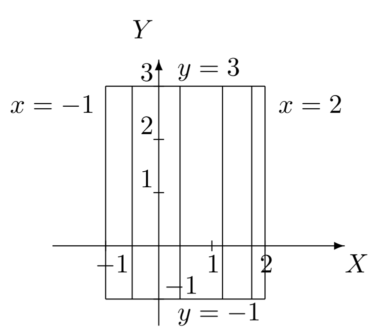
$$xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y)$$

Solution. L'expression donnée vaut donc

$$x\left(\frac{-x}{y^2-x^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\right) + y\left(\frac{y}{y^2-x^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{y^2-x^2} = 1.$$

b) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale $\iint_E (3y^2 + xy^2)\, dx\, dy$ sur $E = [-1,2] \times [-1,3]$ et représenter l'ensemble d'intégration E en le hachurant.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration E ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x, y) \mapsto 3y^2 + xy^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur E, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_E (3y^2 + xy^2)\ dx\ dy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{-1}^{3} (3y^2 + xy^2)\ dy \right)\ dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} \left[(3 + x)y^3 \right]_{y=-1}^{y=3}\ dx$$

$$= \frac{28}{3} \int_{-1}^{2} (3 + x)\ dx = \frac{28}{3} \left[3x + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2} = \frac{28}{3} \left(6 + 2 + 3 - \frac{1}{2} \right) = \frac{28}{3} \cdot \frac{21}{2} = 98.$$

c) On considère la succession d'intégrales simples suivante

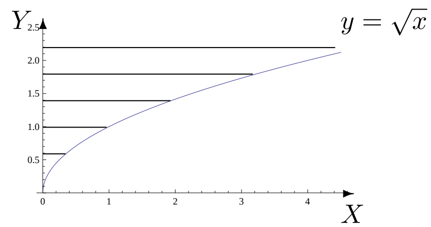
$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}\, dx \right)\ dy.$$

- Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.
- Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}$ est continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5y^2 - x > 0\}$ donc sur son ensemble d'intégration $A \setminus \{(0, 0)\}$ si

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, +\infty[,\ x \in [0, y^2]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in [\sqrt{x}, +\infty[\},$$

ensemble non borné dont la représentation graphique se trouve ci-dessous (partie hachurée) ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}\, dy \right)\ dx.$$

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y)\ \forall (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}$.
Pour y fixé dans $]0, +\infty[$, la fonction $g : x \mapsto \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}$ est continue sur le fermé borné $[0, y^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{y^2} \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}\ dx = (-e^{-y}) \cdot \left[2\sqrt{5y^2 - x} \right]_0^{y^2} = 2(\sqrt{5} - 2)y\, e^{-y}.$$

La fonction $h : y \mapsto 2(\sqrt{5} - 2)y\, e^{-y}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, +\infty[$ non borné. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0, t]\ \forall t > 0$, en intégrant par parties, on a

$$\int_0^{t} 2(\sqrt{5} - 2)y\, e^{-y}\ dy = 2(\sqrt{5} - 2) \left([-ye^{-y}]_0^t + \int_0^t e^{-y}\ dy \right) = 2(\sqrt{5} - 2)(-te^{-t} - e^{-t} + 1)$$

Dès lors, comme

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to +\infty} (te^{-t}) = 0$$

puisque, par application du théorème de l'Hospital, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste à l'infini, on a

$$\lim_{t \to +\infty}\ 2(\sqrt{5} - 2)(-te^{-t} - e^{-t} + 1) = 2(\sqrt{5} - 2).$$

Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}} \, dy \right) dx = 2(\sqrt{5} - 2).$$