Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2012-2013

Corrigé de l'examen de math B du 23 mai 2013
biologistes et géologues

Version 27 mai 2013

$\boxed{\textit{Exercices}}$

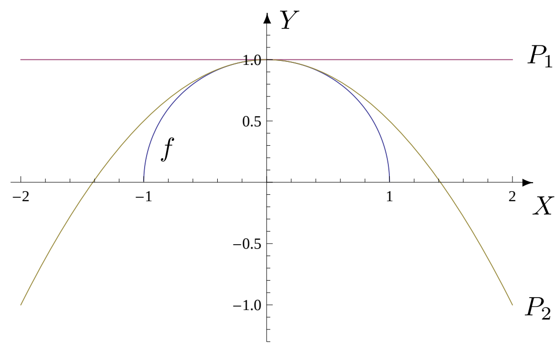
1. **On donne la fonction f par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.**
   a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2$ en 0.
   b) Dans un même repère orthonormé, représenter au voisinage de 0 le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.

   Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $]-1,1[$ et on a

   $Df(x) = -x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}, \quad D^2f(x) = -(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} - x^2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}} = (1-x^2)^{\frac{-3}{2}}(-1+x^2-x^2) = -(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}.$

   Comme $f(0) = 1,\ Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -1$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

   $$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$



2. **a) Soient un réel a et la matrice**

   $$A = \begin{pmatrix} \mathrm{tg}(3) & 2\cos(a) \\ \sin(3) & \cos(3+\pi) \end{pmatrix}.$$

   - Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in [0, 2\pi]$ la matrice est-elle inversible ? Justifier.
   - Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.

   Solution. La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Comme $\mathrm{tg}(3) = \frac{\sin(3)}{\cos(3)}$ et $\cos(3+\ \pi) = -\cos(3)$, on a

   $$\det A = -\sin(3) - 2\sin(3)\cos(a) = -\sin(3)(1 + 2\cos(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

   Ainsi, comme $a \in [0, 2\pi]$, la matrice A est inversible pour tout a différent de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

   La matrice des cofacteurs de A étant égale à

   $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\cos(3) & -\sin(3) \\ -2\cos(a) & \mathrm{tg}(3) \end{pmatrix},$$

   l'inverse de A est la matrice

   $$A^{-1} = \frac{1}{\sin(3)(1+2\cos(a))}\begin{pmatrix} \cos(3) & 2\cos(a) \\ \sin(3) & -\mathrm{tg}(3) \end{pmatrix},\ a \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

   et on a

   $$A.A^{-1} = \frac{1}{\sin(3)(1+2\cos(a))}\begin{pmatrix} \mathrm{tg}(3) & 2\cos(a) \\ \sin(3) & -\cos(3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(3) & 2\cos(a) \\ \sin(3) & -\mathrm{tg}(3) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin(3)(1+2\cos(a))} \begin{pmatrix} \sin(3) + 2\cos(a)\sin(3) & 2\,\mathrm{tg}(3)\cos(a) - 2\,\mathrm{tg}(3)\cos(a) \\ \sin(3)\cos(3) - \sin(3)\cos(3) & 2\sin(3)\cos(a) + \sin(3) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin(3)(1+2\cos(a))} \begin{pmatrix} \sin(3)(1+2\cos(a)) & 0 \\ 0 & \sin(3)(1+2\cos(a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que 1 est valeur propre de B.
- Déterminer tous les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1.

Solution. Le réel 1 est valeur propre de B si et seulement si $\det(B-I) = 0$. En ajoutant la troisième colonne à la première puis en calculant le déterminant par application de la première loi des mineurs sur la troisième ligne, on a successivement

$$\det(B-I) = \det \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{vmatrix} = (-1/4)(1/3-1/3) = 0.$$

Ainsi, 1 est bien valeur propre de B.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(B-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

3. **a) On donne la fonction f par**

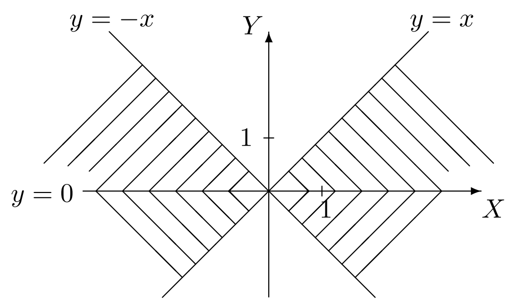
$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2-y^2}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0,\, x^2 - y^2 > 0\right\}.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des droites d'équation cartésienne $y = 0$, $y = x$ et $y = -x$ sont exclus de l'ensemble.



-En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable et la dérivée par rapport à sa seconde variable ?

Solution. En un point de A, on a

$$D_xf(x,y) = D_Z\ln(Z)|_{Z=\sqrt{x^2-y^2}}\ .\ D_T\sqrt{T}|_{T=x^2-y^2}\ .\ D_x(x^2-y^2) + D_U\text{arctg}(U)|_{U=\frac{x}{y}}\ .\ D_x\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\ .\ \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\ .\ 2x + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\ .\ \frac{1}{y} = \frac{x}{x^2-y^2} + \frac{y}{y^2+x^2}$$

et

$$D_yf(x,y) = D_Z\ln(Z)|_{Z=\sqrt{x^2-y^2}}\ .\ D_T\sqrt{T}|_{T=x^2-y^2}\ .\ D_y(x^2-y^2) + D_U\text{arctg}(U)|_{U=\frac{x}{y}}\ .\ D_y\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\ .\ \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\ .\ (-2y) + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\ .\ \left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-y}{x^2-y^2} - \frac{x}{y^2+x^2}$$

Remarque : comme $x^2-y^2>0$, on peut écrire $\ln\left(\sqrt{x^2-y^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2-y^2)$, ce qui permet de calculer plus rapidement les dérivées partielles.

- En utilisant l'expression des dérivées obtenues précédemment, que vaut

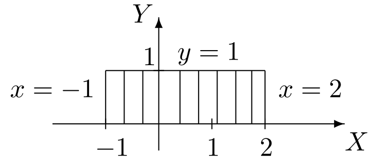
$$xD_xf(x,y) + yD_yf(x,y)$$

Solution. L'expression donnée vaut donc

$$x\left(\frac{x}{x^2-y^2} + \frac{y}{y^2+x^2}\right) + y\left(\frac{-y}{x^2-y^2} - \frac{x}{y^2+x^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} = 1.$$

b) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale $\iint_E (x^2+2xy)\ dx\ dy$ sur $E = [-1,2]\times[0,1]$ et représenter l'ensemble d'intégration E en le hachurant.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration E ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f:(x,y)\mapsto x^2+2xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur E, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_E (x^2+2xy)\ dx\ dy = \int_{-1}^{2}\left(\int_0^1 (x^2+2xy)\ dy\right)\ dx = \int_{-1}^{2}\left[x^2y+xy^2\right]_{y=0}^{y=1}\ dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x^2 + x\right)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

c) On considère la succession d'intégrales simples suivante

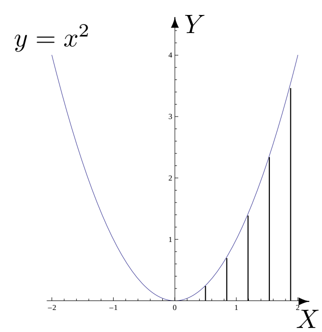
$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}\, dy \right) dx.$$

- Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.
- Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2-y}}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - y > 0\}$ donc sur son ensemble d'intégration $A \setminus \{(0,0)\}$ si

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in [0, x^2]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, +\infty[,\ x \in [\sqrt{y}, +\infty[\},$$

ensemble non borné dont la représentation graphique se trouve ci-dessous (partie hachurée) ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}\, dx \right) dy.$$

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$.
Pour x fixé dans $]0, +\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2-y}}$ est continue sur le fermé borné $[0, x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}}\ dy = \left(-e^{-x}\right)\ .\ \left[2\sqrt{5x^2 - y}\right]_0^{x^2} = 2(\sqrt{5} - 2)x\, e^{-x}.$$

La fonction $h : x \mapsto 2(\sqrt{5} - 2)x\, e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, +\infty[$ non borné. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, en intégrant par parties, on a

$$\int_0^t 2(\sqrt{5} - 2)x\, e^{-x}\ dx = 2(\sqrt{5} - 2) \left([-xe^{-x}]_0^t + \int_0^t e^{-x}\ dx \right) = 2(\sqrt{5} - 2)(-te^{-t} - e^{-t} + 1)$$

Dès lors, comme

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to +\infty} (te^{-t}) = 0$$

puisque, par application du théorème de l'Hospital, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste à l'infini, on a

$$\lim_{t \to +\infty}\ 2(\sqrt{5} - 2)(-te^{-t} - e^{-t} + 1) = 2(\sqrt{5} - 2).$$

Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2 - y}} \, dy \right) dx = 2(\sqrt{5} - 2).$$