
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2012-2013

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATH A DU 16 AOÛT 2013

Question 1.

Comment déterminer la mesure de l'angle non orienté entre 2 vecteurs dont on connaît les composantes dans un repère orthonormé de l'espace ? Donner deux méthodes possibles.

Solution. Voir correction Janvier 2013.

Question 2.

Soient deux fonctions dérivables sur un même intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

Énoncer et démontrer la propriété relative à la dérivabilité de leur produit en tout point de I . Donner aussi l'expression de la dérivée du produit de ces fonctions.

Solution. Voir cours.

Exercices

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(2x) = \cos(x) - 1.$$

Solution. Comme $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, l'équation donnée est équivalente à

$$2\cos^2(x) - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$.

- (b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$\operatorname{arctg}\left(\cotg\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right), \quad \exp(\ln(e^2) - \ln(4)), \quad \frac{1+i}{(1-i)^2}$$

Solution. Comme $\operatorname{dom}(\cotg) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et $\operatorname{im}(\cotg) = \mathbb{R} = \operatorname{dom}(\operatorname{arctg})$, l'expression $\operatorname{arctg}(\cotg(\frac{4\pi}{3}))$ est définie. Dès lors, vu que $\cotg(\frac{4\pi}{3}) = \cotg(\frac{\pi}{3})$, on a $\operatorname{arctg}(\cotg(\frac{4\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$.

Comme $\operatorname{dom}(\ln) =]0, +\infty[$ et $\operatorname{dom}(\exp) = \mathbb{R}$, l'expression $\exp(\ln(e^2) - \ln(4))$ est définie. De plus, en appliquant les propriétés $\forall x, y > 0 : \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$ et $\forall x > 0 : \exp(\ln(x)) = x$, on obtient

$$\exp(\ln(e^2) - \ln(4)) = \exp\left(\ln\left(\frac{e^2}{4}\right)\right) = \frac{e^2}{4}.$$

Enfin, comme $i^2 = -1$, on a $(1-i)^2 = -2i$ et $\frac{1+i}{(1-i)^2} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{(1+i)i}{2} = \frac{-1+i}{2}$.

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x}), \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x - \pi}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2 + x}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Pour lever l'indétermination $-\infty + \infty$, on multiplie numérateur et dénominateur par le binôme conjugué de $x + \sqrt{x^2 + x}$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + x})(x - \sqrt{x^2 + x})}{(x - \sqrt{x^2 + x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{(x - |x|)} = -\frac{1}{2}$$

car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x).$$

La fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{tg}(x)}{x-\pi}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Puisque tout intervalle ouvert contenant π rencontre A , le calcul de la limite en π peut être envisagé.

Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, appliquons le théorème de l'Hospital. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon[\setminus \{\pi\}$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, considérons $f_1 : x \mapsto \operatorname{tg}(x)$ et $f_2 : x \mapsto x - \pi$.

- 1) Ces deux fonctions sont dérivables dans V
- 2) La dérivée de f_2 est non nulle dans V
- 3) On a $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg}(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) = 0$
- 4) De plus, $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\cos^2(x)} = 1$.

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 1.

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx, \quad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2(4x) dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc sur $[0, +\infty[$, ensemble non borné. De plus, elle est positive sur cet ensemble. Pour tout $t > 0$, cette fonction est donc intégrable sur $[0, t]$ et on a

$$\int_0^t \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[\frac{-1}{x+1} \right]_0^t = \frac{-1}{t+1} + 1.$$

Dès lors,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{(x+1)^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{t+1} + 1 \right) = 1.$$

La limite précédente étant finie, f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et son intégrale vaut 1.

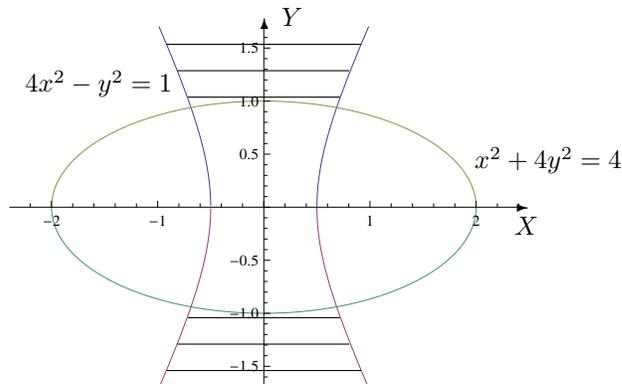
La fonction $x \mapsto \cos^2(4x)$ est continue sur \mathbb{R} ; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ donc intégrable sur cet ensemble. Comme $\cos^2(4x) = \frac{1 + \cos(8x)}{2}$, on a

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2(4x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin(8x)}{8} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

4. On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 - y^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + 4y^2 \geq 4\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) + 4f(x) = \sin(x)$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $D^2f(x) + 4f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 4$ et ses zéros sont $-2i$ et $2i$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1e^{-2ix} + c_2e^{2ix} = c'_1 \cos(2x) + c'_2 \sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2, c'_1, c'_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre est une fonction continue sur \mathbb{R} donc on cherche une solution particulière définie sur \mathbb{R} . Comme les coefficients de l'équation sont réels et que $\sin(x) = \Im e^{ix}$, cherchons une solution particulière F_P de $D^2f(x) + 4f(x) = e^{ix}$ (*), une solution particulière de l'équation donnée sera alors $f_P = \Im F_P$.

La fonction $G : x \mapsto e^{ix}$ est le produit d'un polynôme de degré 0 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = i$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $F_P(x) = A e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Par dérivation, on a immédiatement

$$D^2F_P(x) = -A e^{ix}$$

et en remplaçant dans l'équation (*), on a

$$3A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Dès lors, $F_P(x) = \frac{1}{3} e^{ix} = \frac{1}{3}(\cos(x) + i \sin(x))$ et $f_P(x) = \Im F_P(x) = \frac{1}{3} \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1e^{-2ix} + c_2e^{2ix} + \frac{1}{3} \sin(x) = c'_1 \cos(2x) + c'_2 \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2, c'_1, c'_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.

On achète 200 litres de lait chez un fermier. Pour vérifier s'il y a fraude, on pèse les 200 litres et on trouve 205,43 kg. Trouver combien de litres de lait ont été remplacés par de l'eau si un litre de lait non frelaté pèse 1030 g.

Solution. Soit x le nombre de litres d'eau ajoutés; on a donc $(200 - x)$ litres de lait non frelaté. Comme $1030 \text{ g} = 1,03 \text{ kg}$, en ajoutant le poids de l'eau au poids du lait, on obtient

$$1x + 1,03(200 - x) = 205,43 \Leftrightarrow x - 1,03x = 205,43 - 206 \Leftrightarrow 0,03x = 0,57 \Leftrightarrow x = 19.$$

Le fermier a donc ajouté 19 litres d'eau au lait.