# *1, 2, 3...Sciences*

***Année académique 2012-2013***

## Corrigé de l'examen de math A du 23 mai 2013

Version 17 mai 2013

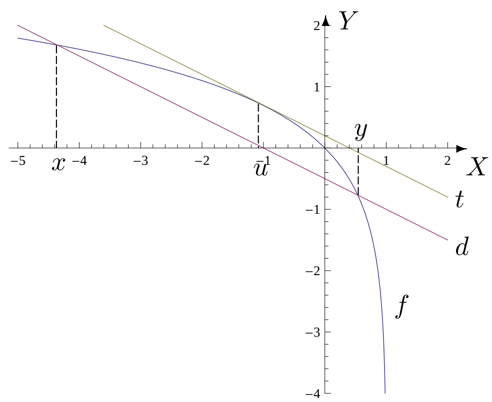
Question 1.
**Enoncer le ≪ théorème des accroissements finis ≫ dans le cas de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ et en donner une interprétation graphique.**

*Solution.* Soit $f : x \mapsto \ln(1-x)$ une fonction réelle et dérivable sur $I = ]-\infty, 1[$. Pour tous $x, y \in I$, il existe un point $u$ compris entre $x$ et $y$ tel que

$$\ln(1-x) = \ln(1-y) + (x-y) D_x \ln(1-x)|_u = \ln(1-y) - (x-y)\ \frac{1}{1-u}.$$

Si $x \neq y$, $u$ est strictement compris entre $x$ et $y$.

Interprétation : si $x \neq y$, le réel $k = \frac{\ln(1-x)-\ln(1-y)}{x-y}$ est le coefficient angulaire de la droite $d$ passant par les points de coordonnées $(x, \ln(1-x))$ et $(y, \ln(1-y))$. Il existe un point $u$ strictement compris entre $x$ et $y$ en lequel la tangente $t$ au graphique de $f$ est parallèle à la droite $d$.




Question 2.
- **Quelle est la définition de la fonction** $\operatorname{arctg}$ **?**
- **Quelle est la forme explicite de la dérivée de la fonction** $\operatorname{arctg}$ **? Démontrer ce résultat.**
- **Où la fonction** $x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))$ **est-elle définie ? (Donner le domaine de définition le plus grand possible)**

*Solution.* Pour les deux premiers items : voir cours.
La fonction $x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $\operatorname{dom}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$, $\operatorname{im}(\operatorname{arctg}) = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\operatorname{dom}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

***Exercices***

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle $x$ appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante**

$$\cos(2x) = 1 + \sin(2x).$$

*Solution.* L'équation est équivalente à

$$\cos(2x) - 1 = \sin(2x) \Leftrightarrow -2\sin^2(x) = 2\sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \ \text{ ou } \ \cos(x) = -\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \ \text{ ou } \ \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow x = k\pi \ \text{ ou } \ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont $\pi$, $\dfrac{7\pi}{4}$, $2\pi$, $\dfrac{11\pi}{4}$ et $3\pi$.

**(b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes**

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{5})\right), \qquad \exp\left(\ln(\pi) + \ln(2)\right), \qquad (1+i)^4$$

*Solution.* Comme $\mathrm{dom}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathrm{im}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} = \mathrm{dom}(\mathrm{arctg})$, l'expression $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{5})\right)$ est définie. Dès lors, vu que $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \mathrm{tg}\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$, on a $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{5})\right) = -\frac{2\pi}{5}$.

Comme $\mathrm{dom}(\ln) = ]0, +\infty[$ et $\mathrm{dom}(\exp) = \mathbb{R}$, l'expression $\exp(\ln(\pi) + \ln(2))$ est définie. De plus, en appliquant les propriétés $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x)\ .\ \exp(y)$ et $\forall x > 0 : \exp(\ln(x)) = x$, on obtient

$$\exp(\ln(\pi) + \ln(2)) = \exp(\ln(\pi))\ .\ \exp(\ln(2)) = 2\,\pi.$$

Enfin, comme $i^2 = -1$, on a $(1 + i)^4 = [(1 + i)^2]^2 = (2i)^2 = -4$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x^2 + x}), \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{cotg}x}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

*Solution.* La fonction $x \mapsto x - \sqrt{x^2 + x}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 0\} = ]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$, ensemble non majoré ; le calcul de la limite en $+\infty$ peut donc être envisagé. Pour lever l'indétermination $\infty - \infty$, on multiplie numérateur et dénominateur par le binôme conjugé de $x - \sqrt{x^2 + x}$ et on a

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x})(x + \sqrt{x^2 + x})}{(x + \sqrt{x^2 + x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{(x + |x|)} = -\frac{1}{2}$$

car

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to+\infty} x.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{cotg}(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}, k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant $\frac{\pi}{2}$ rencontre $A$, le calcul de la limite en $\frac{\pi}{2}$ peut être envisagé.
Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, appliquons le théorème de l'Hospital. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V = ]\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon[ \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, considérons $f_1 : x \mapsto \mathrm{cotg}(x)$ et $f_2 : x \mapsto x - \frac{\pi}{2}$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables dans $V$
2) La dérivée de $f_2$ est non nulle dans $V$
3) On a $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \mathrm{cotg}(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x - \frac{\pi}{2}) = 0$
4) De plus, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1.$
Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut $-1$.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 1}\ dx, \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2(3x)\ dx.$$

*Solution.* La fonction $x \mapsto\mapsto \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc sur $[0, +\infty[$, ensemble non borné. De plus, elle est positive sur cet ensemble. Pour tout $t > 0$, cette fonction est donc intégrable sur $[0, t]$ et on a

$$\int_0^t \frac{1}{(x + 1)^2}\ dx = \left[\frac{-1}{x + 1}\right]_0^t = \frac{-1}{t + 1} + 1.$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{(x + 1)^2}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-1}{t + 1} + 1\right) = 1.$$

La limite précédente étant finie, $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et son intégrale vaut 1.

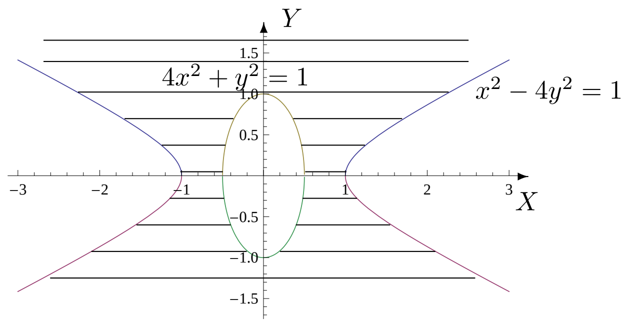
La fonction $x \mapsto \sin^2(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ ; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ donc intégrable sur cet ensemble. Comme $\sin^2(3x) = \dfrac{1-\cos(6x)}{2}$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(3x)\ dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(6x)}{6}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi-2}{24}.$$

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 4y^2 \leq 1 \text{ et } 4x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

*Solution.* Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.




**Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) + f(x) = \cos(x)$$

*Solution.* L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + f(x) = 0$ ; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 1$ et ses zéros sont $-i$ et $i$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix} = c_1' \cos(x) + c_2' \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$$

où $c_1, c_2, c_1', c_2'$ sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme les coefficients de l'équation sont réels et que $\cos(x) = \Re e^{ix}$, cherchons une solution particulière $F_P$ de $D^2 f(x) + f(x) = e^{ix} (*)$, une solution particulière de l'équation donnée sera alors $f_P = \Re F_P$.
La fonction $G : x \mapsto e^{ix}$ est le produit d'un polynôme de degré 0 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = i$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $F_P(x) = Ax\, e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$ où $A$ est une constante à déterminer. Par application du théorème de Leibniz, on a immédiatement

$$D^2 F_P(x) = 2iA\, e^{ix} - Ax\, e^{ix}$$

et en remplaçant dans l'équation $(*)$, on a

$$2iA = 1 \Leftrightarrow A = \frac{-i}{2}.$$

Dès lors, $F_P(x) = -\frac{ix}{2}\, e^{ix} = -\frac{x}{2}(i\cos(x) - \sin(x))$ et $f_P(x) = \Re F_P(x) = \frac{x}{2}\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix} + \frac{x}{2}\sin(x) = c_1' \cos(x) + \left(c_2' + \frac{x}{2}\right)\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$$

où $c_1, c_2, c_1', c_2'$ sont des constantes complexes arbitraires.

5. **Rédiger une résolution d'un des 2 problèmes suivants en justifiant le raisonnement.**
**a)** ***Une personne achète un certain nombre de livres identiques pour une somme totale de 60 EUR. Elle constate plus tard qu'un autre commerçant vend le même livre 1 EUR moins cher à la pièce, ce qui lui aurait permis d'acheter, pour la même somme, 3 livres en plus. Déterminer le nombre de livres achetés.***

*Solution.* Soit $x$ le prix d'un livre acheté chez le premier libraire. De l'énoncé, on peut déduire les informations suivantes

| | 1er libraire | 2eme libraire |
|---|---|---|
| Prix d'un livre | $x > 0$ | $x - 1$ |
| Nombre de livres achetés | $\dfrac{60}{x}$ | $\dfrac{60}{x-1}$ ou $\dfrac{60}{x} + 3$ |

Dès lors, on a

$$\frac{60}{x-1} = \frac{60}{x} + 3 \Leftrightarrow 60x = (x-1)(60+3x) \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$$

et comme $\Delta = 1 + 80 = 81$, les solutions de cette équation sont $x = \frac{1-9}{2} = -4$ et $x = \frac{1+9}{2} = 5$, la valeur négative étant à rejeter.
Ainsi, le nombre de livres achetés est égal à $\frac{60}{5} = 12$.

**b)** ***On achète 100 litres de lait chez un fermier. Pour vérifier s'il y a fraude, on pèse les 100 litres et on trouve*** $102,64$ ***kg. Trouver combien de litres d'eau ont été ajoutés si un litre de lait non frelaté pèse*** $1030$ ***g.***

*Solution.* Soit $x$ le nombre de litres d'eau ajoutés ; on a donc $(100 - x)$ litres de lait non frelaté. Comme $1030$ g $= 1,03$ kg, en ajoutant le poids de l'eau au poids du lait, on obtient

$$1\,x + 1,03(100 - x) = 102,64 \Leftrightarrow x - 1,03x = 102,64 - 103 \Leftrightarrow 0,03x = 0,36 \Leftrightarrow x = 12.$$

Le fermier a donc ajouté 12 litres d'eau au lait.