Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

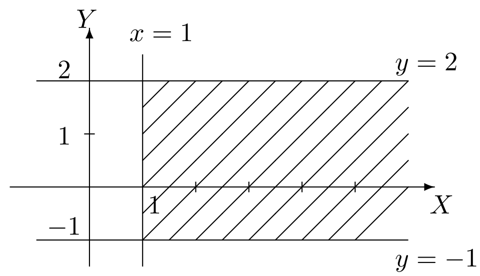
Mathématiques générales (partim B)

Corrigé de l'interrogation de math du 19 avril 2013

Version 22 avril 2013

Questions de théorie

1. **Soit f une fonction définie sur le rectangle $R =]1,+\infty[\times]-1,2[$.**
a) Représenter R dans un repère orthonormé, en le hachurant.
Solution.



Les points des bords ne sont pas inclus dans l'ensemble.

b) Quand dit-on que f est dérivable par rapport à sa seconde variable au point $(2,1)$?
Solution. La fonction f est dérivable par rapport à sa seconde variable au point $(2,1)$ si la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2,1+h)-f(2,1)}{h}=\lim_{y\to 1}\frac{f(2,y)-f(2,1)}{y-1}$$

existe et est finie.
c) Qu'appelle-t-on alors dérivée partielle de f (par rapport à sa seconde variable) en ce point ?
d) Que signifie *"la fonction f est continûment dérivable dans R"* ? Quelle est la notation standard pour désigner l'ensemble des fonctions qui ont cette propriété ?
Solution. Voir cours.

2. **a) En toute généralité, qu'appelle-t-on inverse d'une matrice carrée ?**
b) Enoncer ensuite une condition suffisante sous laquelle une telle matrice inverse existe.
c) Enfin, démontrer que la condition donnée est effectivement suffisante.
Solution. Voir cours.

Exercices

1. **On donne explicitement les fonctions f et g par**

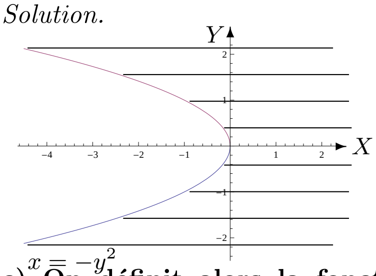
$$f(x,y)=\ln\left(e-\cos(xy)\right), \quad g(x,y)=\sqrt{x+y^2}$$

a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et, dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $xD_xf(x,y)-yD_yf(x,y)$.
Solution. Le domaine de dérivabilité de f est $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : e-\cos(xy)>0\}=\mathbb{R}^2$ car $e>1$ et $\cos(xy)\in[-1,1]$.
Comme

$$(D_xf)(x,y)=\frac{1}{e-\cos(xy)}\ .\ \sin(xy)\ .\ y \quad \text{et} \quad (D_yf)(x,y)=\frac{1}{e-\cos(xy)}\ .\ \sin(xy)\ .\ x,$$

l'expression donnée est nulle.
b) Déterminer le domaine où la fonction g est continûment dérivable et en donner une représentation graphique dans un repère orthonormé.

Solution.



La fonction g est continûment dérivable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y^2 > 0\}$; en voici une représentation graphique, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble.

c) On définit alors la fonction $G \ : \ t \mapsto g\left(\cos(2t), \sin(t)\right)$. Quel est le domaine de dérivabilité de G inclus dans l'intervalle $[0,\pi]$? Dans celui-ci, déterminer l'expression explicite de la dérivée de la fonction G.

Solution. La fonction G est dérivable sur

$$\{t \in \mathbb{R} : \cos(2t) + \sin^2(t) > 0\} = \{t \in \mathbb{R} : \cos^2(t) - \sin^2(t) + \sin^2(t) > 0\} = \{t \in \mathbb{R} : \cos^2(t) > 0\}.$$

Dès lors, le domaine de dérivabilité de G inclus dans l'intervalle $[0,\pi]$ est $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$.
Comme $G : t \mapsto |\cos(t)|$, l'expression explicite de la dérivée de G est donnée par

$$DG(t) = \begin{cases} -\sin(t) & \text{si} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \sin(t) & \text{si} \quad t \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

2. **Déterminer la valeur de l'intégrale**

$$\iint_A e^{x^2+y^2} dx \ dy, \qquad \text{avec} \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

et représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant.

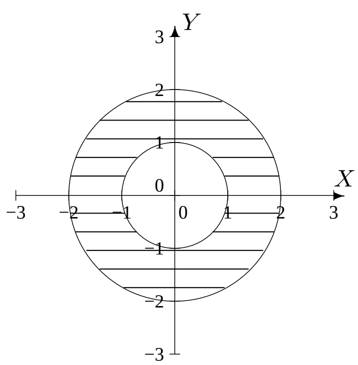
Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble fermé borné ; dès lors, elle est intégrable sur A.
En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration est $A' = \{(r,\theta) : r \in [1,2], \theta \in [0,2\pi]\}$ et dès lors on doit calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r\, e^{r^2} \ dr \right) \ d\theta.$$

Comme on a

$$I_1 = \int_1^2 r\, e^{r^2} \ dr = \left[\frac{1}{2} e^{r^2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e), \text{ l'intégrale } I \text{ vaut } \frac{1}{2}(e^4 - e) \ . \ 2\pi = \pi(e^4 - e).$$

Voici la représentation graphique de A ; les points des cercles sont compris dans l'ensemble.



3. **Soit f une fonction intégrable sur une partie A du plan telle que**

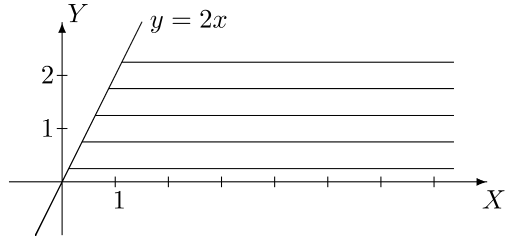
$$\iint_A f(x,y) \ dxdy \ = \ \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2x} f(x,y) \ dy \right) \ dx.$$

a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé (en le hachurant).

Solution. On a

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[, y \in [0,2x]\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[, x \in \left[\frac{y}{2}, +\infty\right[\right\}.$$

Sa représentation graphique est la suivante



b) Permuter les intégrales.

Solution. En permutant les intégrales, on a

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{y}{2}}^{+\infty} f(x,y)\ dx \right) dy.$$

c) La fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = ye^{-x}$ est-elle intégrable sur A ? Si la réponse est affirmative, déterminer la valeur de cette intégrale.

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto ye^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A non borné. De plus, elle est positive sur A.

Fixons y dans $[0,+\infty[$ et considérons la fonction $g : x \mapsto ye^{-x}$. Cette fonction est continue sur $\left[\frac{y}{2}, +\infty\right[$. Vérifions son intégrabilité en $+\infty$ en calculant

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\frac{y}{2}}^{t} ye^{-x}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-ye^{-x}\right]_{\frac{y}{2}}^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left(-ye^{-t} + ye^{-\frac{y}{2}}\right) = ye^{-\frac{y}{2}}.$$

Comme cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $\left[\frac{y}{2}, +\infty\right[$ et $\int_{\frac{y}{2}}^{+\infty} ye^{-x}\ dx = ye^{-\frac{y}{2}}$.

Considérons la fonction $h : y \mapsto y\,e^{-\frac{y}{2}}$ continue sur $[0,+\infty[$. Vérifions son intégrabilité en $+\infty$ en calculant

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t y\,e^{-\frac{y}{2}}\ dy = \lim_{t\to+\infty} \left[-2y\,e^{-\frac{y}{2}} - 4e^{-\frac{y}{2}}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \left(-2t\,e^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + 4\right) = 4$$

puisque $\lim_{t\to+\infty} \left(-2t\,e^{-\frac{t}{2}}\right) = 0$ par application du théorème de l'Hospital et $\lim_{t\to+\infty} \left(-4e^{-\frac{t}{2}}\right) = 0$.

Comme la limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et f est intégrable sur A. De plus, comme $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A$, on a $\iint_A f(x,y)\ dx\ dy = 4$.