1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales B : corrigé du test 1

Version 27 février 2013

Test 1 du 26-02-2013

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction donnée explicitement par**

$$f(x,y) = y - |3 - x^2|$$

est dérivable par rapport à sa première variable au point $(2,3)$ **et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**

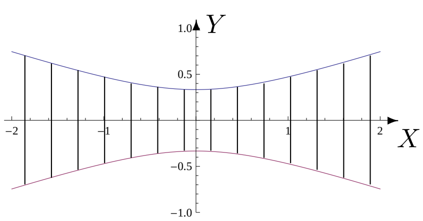
Solution. Comme f est défini sur $\mathbb{R}^2$, que $f(x,3) = 3 - |3 - x^2|$ et $f(2,3) = 3 - |3-4| = 2$, on a

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x,3) - f(2,3)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3 + 3 - x^2 - 2}{x-2} = -\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = -4.$$

Puisque la limite existe et est finie, la fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(2,3)$ et sa dérivée vaut -4.

2. **On donne la fonction** g **explicitement par** $g(x,y) = \sqrt{x^2 - 9y^2 + 1}$**. Déterminer ses domaines de définition et de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.**

Solution. Le domaine de définition de g est l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 9y^2 + 1 \geq 0\right\}$. Le domaine de dérivabilité de g est l'ensemble $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 9y^2 + 1 > 0\right\}$.



L'ensemble A est l'ensemble des points de la partie hachurée, les points de l'hyperbole étant compris dans A. L'ensemble B est l'ensemble des points de la partie hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus.

3. **Soit** $f(x) = g(u(x), v(x))$ **avec** $u(0) = 3$**,** $v(0) = -1$**,** $(Du)(0) = 2$**,** $(Dv)(0) = 1$**,** $(D_1g)(3,-1) = 7$ **et** $(D_2g)(3,-1) = 4$**. En supposant que** f **est dérivable en 0, que vaut** $(Df)(0)$ **?**
Note : on note D_ig **la dérivée de** g **par rapport à sa** i **ème variable.**

Solution. Puisque f est dérivable en 0, on a

$$(Df)(0) = (D_1g)(u(0),v(0)) \,.\, (Du)(0) + (D_2g)(u(0),v(0)) \,.\, (Dv)(0) = 7 \,.\, 2 + 4 \,.\, 1 = 14 + 4 = 18.$$

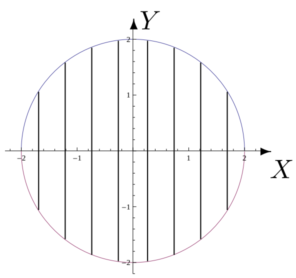
Test 1 du 28-02-2013

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction donnée explicitement par**
$$f(x,y) = |2-y^2| - x$$
est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(2,3)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

   Solution. Comme f est défini sur $\mathbb{R}^2$, que $f(2,y) = |2-y^2| - 2$ et $f(2,3) = |2-9| - 2 = 5$, on a
$$\lim_{y\to 3} \frac{f(2,y) - f(2,3)}{y-3} = \lim_{y\to 3} \frac{y^2-2-2-5}{y-3} = -\lim_{y\to 3} \frac{(y-3)(y+3)}{y-3} = 6.$$
   Puisque la limite existe et est finie, la fonction f est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(2,3)$ et sa dérivée vaut 6.

2. **On donne la fonction g explicitement par $g(x,y) = \arcsin(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4})$. Déterminer ses domaines de définition et de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.**

   Solution. Le domaine de définition de g est l'ensemble
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \le 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}.$$
   Le domaine de dérivabilité de g est l'ensemble
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} < 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} < 1\right\}.$$



   L'ensemble A est l'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle (partie hachurée), ceux du cercle étant compris dans A.
   L'ensemble B est l'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle, ceux du cercle étant exclus de B.

3. **Soit $h(t) = f(m(t), p(t))$ avec $m(1) = 2$, $p(1) = 0$, $(Dm)(1) = -1$, $(Dp)(1) = 4$, $(D_1 f)(2,0) = 3$ et $(D_2 f)(2,0) = -2$. En supposant que h est dérivable en 1, que vaut $(Dh)(1)$?**
Note : on note $D_i f$ la dérivée de f par rapport à sa i ème variable.

   Solution. Puisque h est dérivable en 1, on a
$$(Dh)(1) = (D_1 f)(m(1), p(1)) \,.\, (Dm)(1) + (D_2 f)(m(1), p(1)) \,.\, (Dp)(1) = 3\,.(-1) + (-2).4 = -3 + (-8) = -11.$$

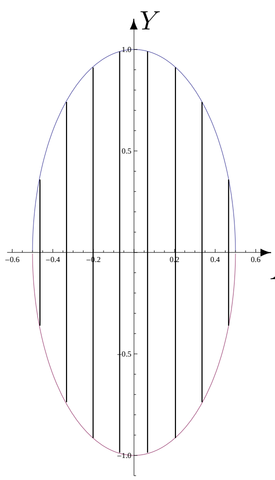
Test 1 du 01-03-2013

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction donnée explicitement par**
$$f(x,y) = |6 - 2x^2| - 3y$$
est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-2,1)$ **et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**

Solution. Comme f est défini sur $\mathbb{R}^2$, que $f(x,1) = |6-2x^2| - 3$ et $f(-2,1) = |6-8| - 3 = -1$, on a
$$\lim_{x\to -2} \frac{f(x,1) - f(-2,1)}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{2x^2 - 6 - 3 + 1}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{2(x-2)(x+2)}{x+2} = -8.$$
Puisque la limite existe et est finie, la fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-2,1)$ et sa dérivée vaut -8.

2. **On donne la fonction** g **explicitement par** $g(x,y) = \arccos(4x^2 + y^2)$**. Déterminer ses domaines de définition et de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.**

Solution. Le domaine de définition de g est l'ensemble
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \le 4x^2 + y^2 \le 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$
Le domaine de dérivabilité de g est l'ensemble
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 < 4x^2 + y^2 < 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 < 1\right\}.$$



L'ensemble A est l'ensemble des points situés à l'intérieur de l'ellipse (partie hachurée), ceux de l'ellipse étant compris dans A.
L'ensemble B est l'ensemble des points situés à l'intérieur de l'ellipse, ceux de l'ellipse étant exclus de B.

3. **Soit** $F(y) = h(r(y), s(y), t(y))$ **avec** $r(-1) = 0$, $s(-1) = 1$, $t(-1) = 4$, $(Dr)(-1) = 2$, $(Ds)(-1) = -2$, $(Dt)(-1) = 3$, $(D_1h)(0,1,4) = -5$, $(D_2h)(0,1,4) = -3$ **et** $(D_3h)(0,1,4) = 10$**. En supposant que** F **est dérivable en -1, que vaut** $(DF)(-1)$ **?**
Note : on note D_ih **la dérivée de** h **par rapport à sa** i **ème variable.**

Solution. Puisque F est dérivable en -1, on a
$$(DF)(-1) = (D_1h)(r(-1), s(-1), t(-1))\ .\ (Dr)(-1) + (D_2h)(r(-1), s(-1), t(-1))\ .\ (Ds)(-1)$$
$$+ (D_3h)(r(-1), s(-1), t(-1))\ .\ (Dt)(-1) = (-5)\ .\ 2 + (-3)\ .\ (-2) + 10\ .\ 3 = -10 + 6 + 30 = 26.$$