Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Mathématiques générales B : corrigé du test 2

Version 8 mars 2013

Test 2 du 11-03-2013

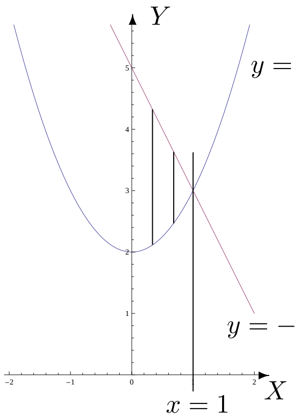
1. **Sachant que la fonction est intégrable sur l'ensemble considéré, permuter l'ordre d'intégration.**

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2+2}^{-2x+5} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Solution. L'ensemble d'intégration est donné par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [x^2+2, -2x+5]\}.$$

Voici sa représentation graphique



On peut aussi le décrire par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [2,3],\ x \in [0, \sqrt{y-2}]\}$$
$$\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [3,5],\ x \in \left[0, \frac{5-y}{2}\right] \right\}.$$

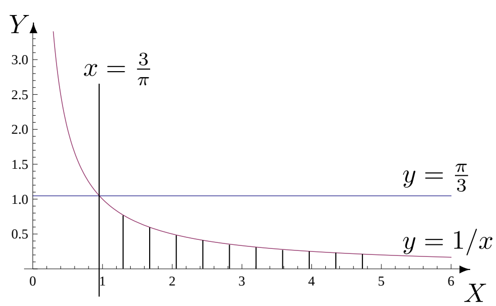
Dès lors, en permutant l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_2^3 \left(\int_0^{\sqrt{y-2}} f(x,y)\ dx \right) dy + \int_3^5 \left(\int_0^{\frac{5-y}{2}} f(x,y)\ dx \right) dy.$$

2. **Calculer, si possible, l'intégrale suivante.**

$$\int_0^{\pi/3} \left(\int_{3/\pi}^{1/y} \frac{\cos y}{x^2}\, dx \right) dy$$

Solution.



L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points de la partie hachurée ; c'est un ensemble non borné.

La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{\cos(y)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$ donc sur A. De plus, $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A$.

Si y est fixé dans $]0, \frac{\pi}{3}]$, la fonction $g : x \mapsto \frac{\cos(y)}{x^2}$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[3/\pi, 1/y]$. Elle est donc intégrable sur cet intervalle et son intégrale vaut

$$\int_{3/\pi}^{1/y} \frac{\cos(y)}{x^2}\, dx = \left[\frac{-\cos(y)}{x} \right]_{3/\pi}^{1/y} = \cos(y) \left(\frac{\pi}{3} - y \right).$$

La fonction $h : y \mapsto \cos(y) \left(\frac{\pi}{3} - y \right)$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{3}]$; elle est donc intégrable sur cet intervalle et, dès lors, f est intégrable sur A.

Comme f est positif en tout point de A, l'intégrale demandée s'obtient en intégrant par parties la fonction h sur $[0, \frac{\pi}{3}]$. Ainsi, on obtient

$$\int_0^{\pi/3} \cos(y) \left(\frac{\pi}{3} - y \right)\, dy = \left[\sin(y) \left(\frac{\pi}{3} - y \right) \right]_0^{\pi/3} + \int_0^{\pi/3} \sin(y)\, dy = [-\cos(y)]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}.$$

Test 2 du 12-03-2013

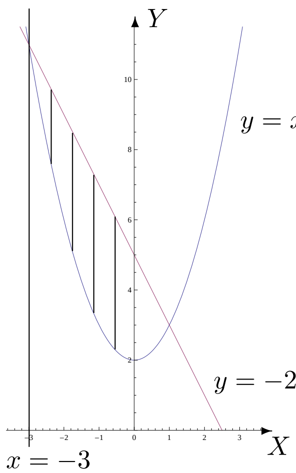
1. **Sachant que la fonction est intégrable sur l'ensemble considéré, permuter l'ordre d'intégration.**

$$\int_{-3}^{0}\left(\int_{x^2+2}^{-2x+5} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Solution. L'ensemble d'intégration est donné par

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-3,0],\ y\in[x^2+2,-2x+5]\}.$$

Voici sa représentation graphique



On peut aussi le décrire par

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[2,5],\ x\in[-\sqrt{y-2},0]\}$$
$$\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[5,11],\ x\in\left[-\sqrt{y-2},\frac{5-y}{2}\right]\right\}.$$

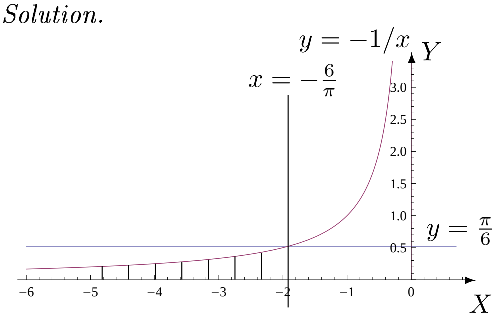
Dès lors, en permutant l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_2^5\left(\int_{-\sqrt{y-2}}^{0} f(x,y)\ dx\right)dy+\int_5^{11}\left(\int_{-\sqrt{y-2}}^{\frac{5-y}{2}} f(x,y)\ dx\right)dy.$$

2. **Calculer, si possible, l'intégrale suivante.**

$$\int_0^{\pi/6}\left(\int_{-1/y}^{-6/\pi}\frac{\sin y}{x^2}\,dx\right)dy$$

Solution.



L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points de la partie hachurée; c'est un ensemble non borné.

La fonction $f:(x,y)\mapsto\frac{\sin(y)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_0\times\mathbb{R}$ donc sur A. De plus, $|f(x,y)|=f(x,y)\ \forall(x,y)\in A$.

Si y est fixé dans $]0,\frac{\pi}{6}]$, la fonction $g:x\mapsto\frac{\sin(y)}{x^2}$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[-1/y,-6/\pi]$. Elle est donc intégrable sur cet intervalle et son intégrale vaut

$$\int_{-1/y}^{-6/\pi}\frac{\sin(y)}{x^2}\,dx=\left[\frac{-\sin(y)}{x}\right]_{-1/y}^{-6/\pi}=\sin(y)\left(\frac{\pi}{6}-y\right).$$

La fonction $h:y\mapsto\sin(y)\left(\frac{\pi}{6}-y\right)$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,\frac{\pi}{6}]$; elle est donc intégrable sur cet intervalle et, dès lors, f est intégrable sur A.

Comme f est positif en tout point de A, l'intégrale demandée s'obtient en intégrant par parties la fonction h sur $[0,\frac{\pi}{6}]$. Ainsi, on obtient

$$\int_0^{\pi/6}\sin(y)\left(\frac{\pi}{6}-y\right)\,dy=\left[-\cos(y)\left(\frac{\pi}{6}-y\right)\right]_0^{\pi/6}-\int_0^{\pi/6}\cos(y)\,dy=\frac{\pi}{6}-[\sin(y)]_0^{\pi/6}=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}.$$

Test 2 du 15-03-2013

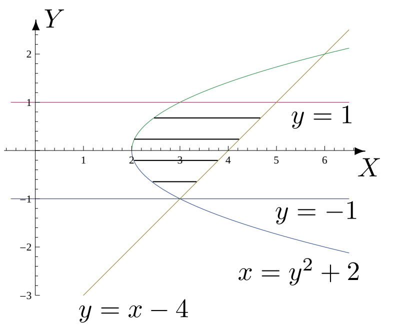
1. **Sachant que la fonction est intégrable sur l'ensemble considéré, permuter l'ordre d'intégration.**

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2+2}^{y+4} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Solution. L'ensemble d'intégration est donné par

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-1,1],\ x\in[y^2+2, y+4]\}.$$

Voici sa représentation graphique



On peut aussi le décrire par

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[2,3],\ y\in[-\sqrt{x-2},\sqrt{x-2}]\}$$
$$\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[3,5],\ y\in[x-4,1]\right\}.$$

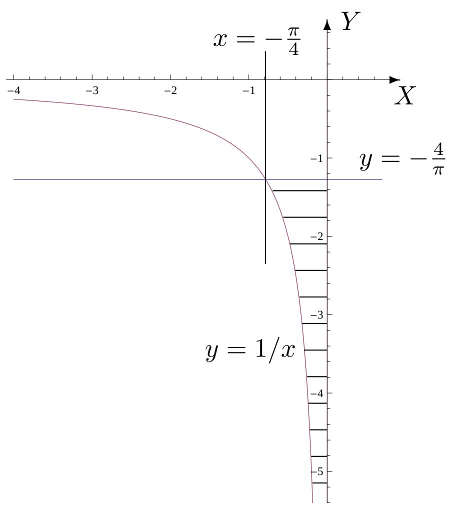
Dès lors, en permutant l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_2^3\left(\int_{-\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x-2}} f(x,y)\ dy\right)dx + \int_3^5\left(\int_{x-4}^{1} f(x,y)\ dy\right)dx.$$

2. **Calculer, si possible, l'intégrale suivante.**

$$\int_{-\pi/4}^{0}\left(\int_{1/x}^{-4/\pi}\frac{\cos x}{y^2}\,dy\right)dx$$

Solution.



L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points de la partie hachurée ; c'est un ensemble non borné.

La fonction $f : (x,y)\mapsto \frac{\cos(x)}{y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0$ donc sur A. De plus, $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y)\in A$.

Si x est fixé dans $[-\frac{\pi}{4}, 0[$, la fonction $g : y\mapsto \frac{\cos(x)}{y^2}$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[1/x, -4/\pi]$. Elle est donc intégrable sur cet intervalle et son intégrale vaut

$$\int_{1/x}^{-4/\pi}\frac{\cos(x)}{y^2}\,dy = \left[\frac{-\cos(x)}{y}\right]_{1/x}^{-4/\pi} = \cos(x)\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

La fonction $h : x\mapsto \cos(x)\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[-\frac{\pi}{4}, 0]$; elle est donc intégrable sur cet intervalle et, dès lors, f est intégrable sur A.

Comme f est positif en tout point de A, l'intégrale demandée s'obtient en intégrant par parties la fonction h sur $[-\frac{\pi}{4}, 0]$. Ainsi, on obtient

$$\int_{-\pi/4}^{0}\cos(x)\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\,dx = \left[\sin(x)\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]_{-\pi/4}^{0} - \int_{-\pi/4}^{0}\sin(x)\,dx = [\cos(x)]_{-\pi/4}^{0} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$