Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Mathématiques générales B : corrigé du test 3

Version 13 mars 2013

Test 3 du 18-03-2013

1. **Calculer, si elle existe, la matrice inverse de** $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Solution. En remplaçant la troisième ligne par cette ligne moins 2 fois la deuxième, on obtient

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-2+6) = -4 \neq 0,$$

   si on applique la première loi des mineurs à la troisième colonne. Puisque le déterminant de M n'est pas nul, la matrice inverse de M existe.

   Si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de M, on a

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{et dès lors} \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,\widetilde{\mathcal{M}} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. **La matrice M suivante est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Solution. Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(M - \lambda I) = 0$. On a

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)((-1-\lambda)^2 - 1)$$

   si on applique la première loi des mineurs à la troisième colonne. Ainsi,

$$\det(M-\lambda I) = (-1-\lambda)(-1-\lambda+1)(-1-\lambda-1) = -\lambda(-1-\lambda)(-2-\lambda)$$

   et les valeurs propres de M sont -2, -1 et 0. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice est diagonalisable.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M+2\,I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}.$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M+\,I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=x \\ z=2x \end{array} \right. .$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Ainsi, par exemple, la matrice inversible

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{est telle que} \quad S^{-1}MS = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Test 3 du 19-03-2013

1. **Calculer, si elle existe, la matrice inverse de** $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Solution. En remplaçant la première ligne par cette ligne augmentée de la deuxième puis en remplaçant la troisième ligne par cette ligne augmentée du double de la deuxième, on obtient

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1).(-1)(5+15) = 20 \neq 0,$$

   si on applique la première loi des mineurs à la troisième colonne. Puisque le déterminant de M n'est pas nul, la matrice inverse de M existe.

   Si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de M, on a

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -1 & 7 & -5 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et dès lors} \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,\widetilde{\mathcal{M}} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. **La matrice M suivante est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Solution. Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(M-\lambda I)=0$. On a

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -6 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(\lambda^2+2)+6\lambda$$

   si on applique la première loi des mineurs à la première ligne. Ainsi,

$$\det(M-\lambda I) = \lambda(-\lambda^2-2+6) = \lambda(4-\lambda^2) = \lambda(2-\lambda)(2+\lambda)$$

   et les valeurs propres de M sont $-2,\ 0$ et 2. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice est diagonalisable.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M+2\,I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6y=0 \\ -x+2y-z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ z=-y \end{cases}.$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6y=0 \\ -x-z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}.$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M-2\,I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x-6y=0 \\ -x-2y-z=0 \\ 2y-2z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-3y \\ z=y \end{array} \right. .$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs $c \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Ainsi, par exemple, la matrice inversible

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{est telle que} \quad S^{-1}MS = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Test 3 du 22-03-2013

1. **Calculer, si elle existe, la matrice inverse de** $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

   Solution. En remplaçant la deuxième colonne par cette colonne à laquelle on ajoute la troisième, on obtient

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3(-4-1) = -15 \neq 0,$$

   si on applique la première loi des mineurs à la deuxième colonne. Puisque le déterminant de M n'est pas nul, la matrice inverse de M existe.

   Si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de M, on a

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et dès lors} \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,\widetilde{\mathcal{M}} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. **La matrice M suivante est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Solution. Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(M-\lambda I) = 0$. On a

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)-3)$$

   si on applique la première loi des mineurs à la troisième ligne. Ainsi,

$$\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2-3) = \lambda(\lambda-4)(1-\lambda)$$

   et les valeurs propres de M sont $0,\ 1$ et 4. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice est diagonalisable.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ 3x+y-z=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x \\ z=0 \end{cases}.$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5x \\ z=3x \end{cases}.$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 4 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M-4\ I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ 3x-3y-z=0 \\ -3z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y \\ z=0 \end{array}\right. .$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 4 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c\in\mathbb{C}_0$.

Ainsi, par exemple, la matrice inversible

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{est telle que} \quad S^{-1}MS=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$