1. On donne la fonction f explicitement par $f(x) = \sqrt{1+2x^2}$.

a) Si c'est possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1 et 2 en 0.

b) Dans un même repère orthonormé, représenter alors f et ses approximations au voisinage de 0.

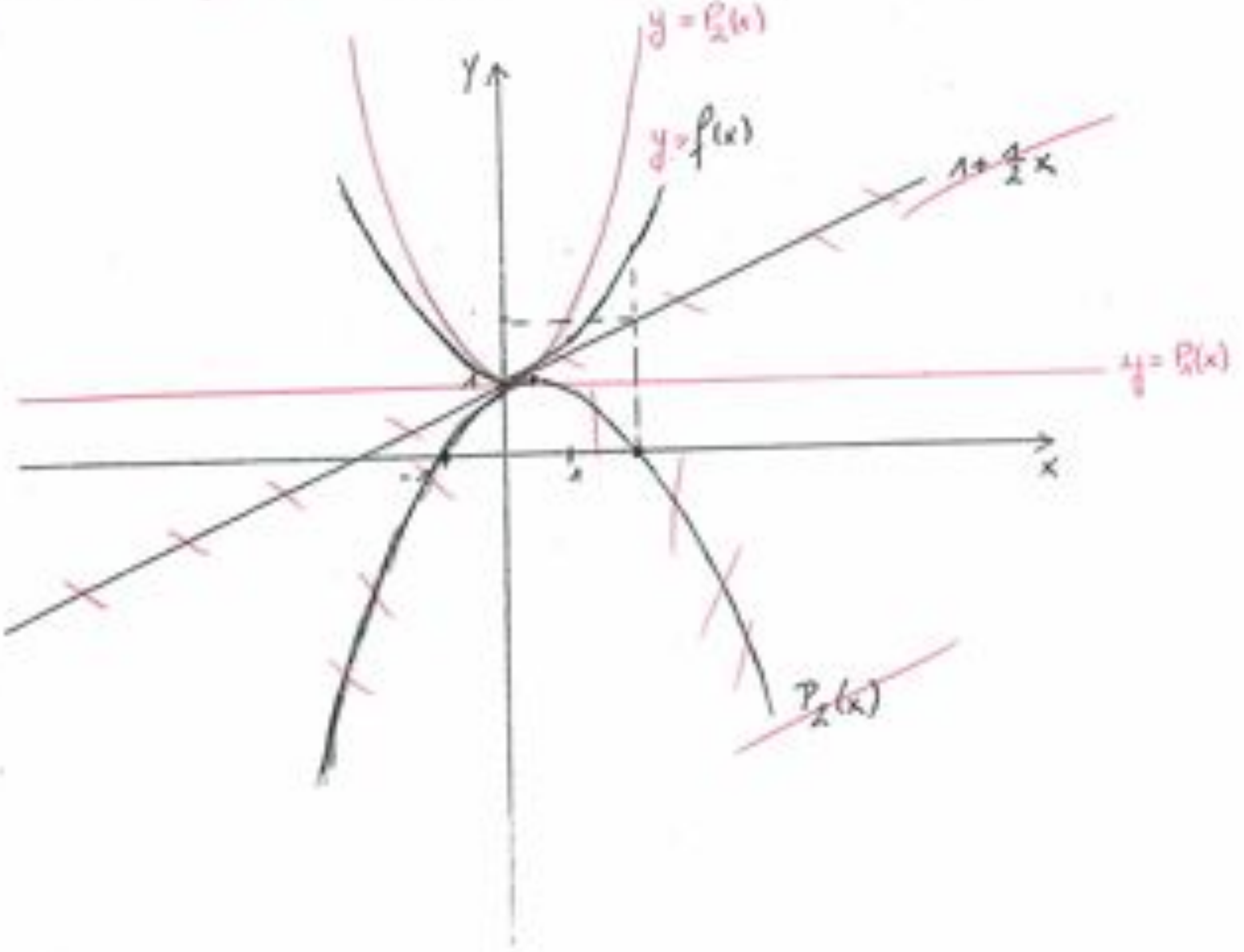
La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f(x) = \sqrt{1+2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$Df(x) = \frac{1 \cdot 4x}{2\sqrt{1+2x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D^2 f(x) = \frac{-2 \cdot \cancel{\frac{1}{2\sqrt{1+2x^2}}}}{1+2x^2} = \frac{\cancel{-1}\ 2}{(1+2x^2)\sqrt{1+2x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Donc $f(0) = 1$, $Df(0) = 0$ et $D^2 f(0) = 2$. Les approximations demandées sont $P_1(x) = 1 + \cancel{\frac{1}{2}x}$, $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = 1 + \cancel{\frac{1}{2}x} + 2\frac{x^2}{2} = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$



2. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A

b) Que vaut $2A - A^2$?

a) $\det(A - \lambda I) \overset{\det}{=} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 6 = 0 \longrightarrow \Delta = 9 - 24 = -15$

~~Il n'y a pas de racines donc pas de valeurs propres~~

On a deux valeurs propres (complexes) : $\frac{3+i\sqrt{15}}{2}$ et $\frac{3-i\sqrt{15}}{2}$

b) $2A - A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \cancel{\begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}$

On a $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

donc $2A - A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. Soient les matrices $A = (\cos(1) \quad i-1)$ et $B = \begin{pmatrix} 1/i \\ 2 \end{pmatrix}$.

Si c'est possible, calculer le déterminant du produit BA.

(*)

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{i} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(1)}{i} & \frac{i-1}{i} \\ 2\cos(1) & 2i-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i\cos(1) & 1+i \\ 2\cos(1) & 2i-2 \end{pmatrix}$$ ⚠ erreur de calcul

Comme BA est une matrice carrée, on peut calculer det(BA) et on a

$$\det(BA) = (-i\cos(1))(2i-2) - (2\cos(1))(1+i)$$

$$= 2\cos(1) + 2i\cos(1) - 2\cos(1) - 2i\cos(1) = 0.$$

⚠ erreur de calcul

(*) B est de format 2×1 et A est de format 1×2. Le nombre de colonnes de B étant égal au nombre de lignes de A, le produit B.A est possible et on a

Remarque

Pour gagner du temps dans le calcul du déterminant, on aurait pu dire :
« Comme la 2ème ligne de BA est égale à la première multipliée par 2i, le déterminant est nul ».

4. On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(xy - x)$.

a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Représenter ce domaine.

b) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(e^{-t}-1, e^{-t}+1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.

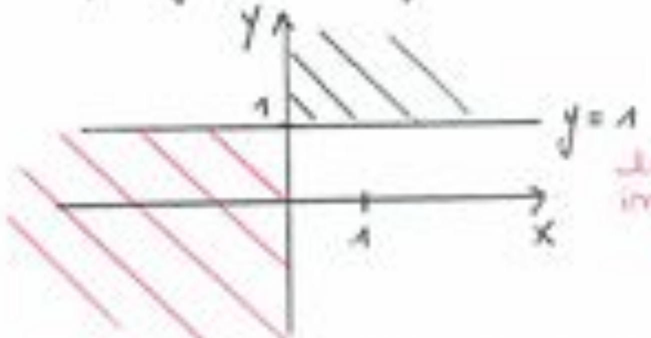
c) Que vaut la dérivée de F en $t = 1$? Simplifier votre réponse au maximum.

f est infiniment dérivable sur

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - x \in]0, +\infty[\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(y-1) > 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 1\}$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ et } y < 1\}$



les bords ne sont pas inclus dans l'ensemble.

b) $F(t) = \ln\left((e^{-t}-1)(e^{-t}+1) - (e^{-t}-1)\right)$

$= \ln\left(e^{-2t} - e^{-t} + e^{-t} - 1 - e^{-t} + 1\right)$

$= \ln\left(e^{-2t} - e^{-t}\right) = \ln\left(e^{-t}(e^{-t} - 1)\right)$

$\cancel{= \ln e^{-t} \cdot \ln(e^{-t} - 1) = -t \ln(e^{-t} - 1)}$

La fonction est dérivable si $e^{-t} - 1 \in]0, +\infty[$

$\Leftrightarrow e^{-t} > 1 \Leftrightarrow -t > 0 \Leftrightarrow t < 0$

Le domaine de dérivabilité de F est $\cancel{]0, +\infty[}$ $]-\infty, 0[$ et sur ce domaine, on a $F(t) = \ln(e^{-t}(e^{-t}-1)) = \ln(e^{-t}) + \ln(e^{-t}-1)$

$= -t + \ln(e^{-t}-1)$.

$DF(t) = -\cancel{\dfrac{1}{e^{-t}-1}}$ (même pas cohérent avec ce qui précède)

c) $\cancel{DF(1) = -\dfrac{1}{e^{-1}-1} = -\dfrac{1}{\frac{1}{e}-1} = -\dfrac{e}{1-e}}$

F n'est pas dérivable en 1.

$DF(t) = -1 + \dfrac{1}{e^{-t}-1}(-e^{-t}) = -1 - \dfrac{e^{-t}}{e^{-t}-1}, \quad t \in]-\infty, 0[$

5. On donne l'ensemble borné fermé $A = [-1, 1] \times [-e, e]$.
Si c'est possible, déterminer

$$\iint_A \frac{1}{xy}\, dx\, dy.$$

Commencer par vérifier l'intégrabilité !!!

$$\iint_A \frac{1}{xy}\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-e}^{e} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}\, dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \Big[\ln|y| \Big]_{-e}^{e} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \big(\ln|-e| - \ln e \big)\, dx$$

$$= 0.$$

Aucun sens puisque la fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{xy}$ n'est pas intégrable sur A.

$f : (x,y) \mapsto \frac{1}{xy}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$ donc sur $([-1,0[\cup]0,1]) \times ([-e,0[\cup]0,e])$ non borné fermé.

<u>Vérifions l'intégrabilité de f sur A.</u>

Fixons $y \in [-e,0[\cup]0,e]$.

$f_A : x \mapsto \frac{1}{|xy|}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $[-1,0[\cup]0,1]$

et on a $\lim\limits_{x \to 0^-} |x| \frac{1}{|xy|} = \frac{1}{|y|} \neq 0$.

Donc f_A n'est pas intégrable sur $[-1,0[\cup]0,1]$ (par le critère de non intégrabilité)

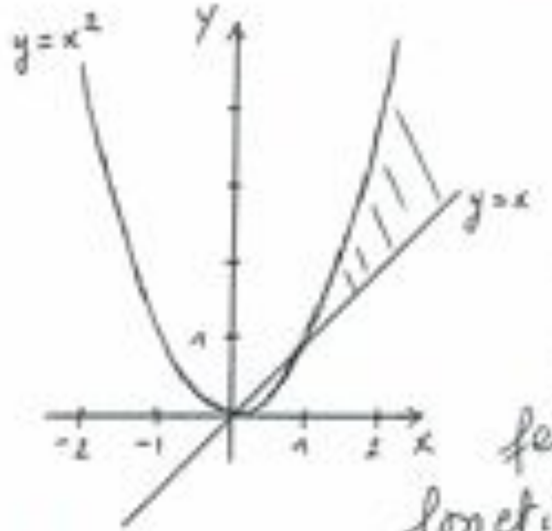
Dès lors, f n'est pas intégrable sur A.

(*) $f:(x,y)\mapsto xe^{-y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A non borné fermé. De plus, f est de signe constant sur A.

6. On donne l'ensemble $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le y\le x^2\}$
a) Représenter graphiquement cet ensemble dans un repère orthonormé en le hachurant.
b) Si c'est possible, déterminer la valeur de l'intégrale de la fonction $f:(x,y)\mapsto x\,e^{-y}$ sur A et simplifier votre réponse au maximum.

On a $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[1,+\infty[\text{ et } y\in[x,x^2]\}$

Les points des bords sont compris dans l'ensemble.



(*)

Pour x fixé dans $[1,+\infty[$ $f_1 : y\mapsto xe^{-y}$ est ~~(de signe constant et)~~ continu dans le fermé borné $[x,x^2]$ donc la fonction y est intégrable et on a

$$\int_{x}^{x^2} x e^{-y}\,dy = \left[-xe^{-y}\right]_{x}^{x^2} = +xe^{-x} - xe^{-x^2}$$

Aucun sens!

~~Pour y fixé dans $[x^2,x]$~~, $f_2 : x\mapsto -xe^{-x^2}+xe^{-x}$ est continu dans le non borné $[1,+\infty[$. Vérifions l'intégrabilité en $+\infty$ en utilisant la définition. Pour $t\in[1,+\infty[$

$f_2 : x\mapsto -xe^{-x^2}+xe^{-x}$ est continue sur le fermé borné $[1,t]$ donc f_2 est intégrable sur $[1,t]$ et donc intégrable en $+\infty$ si $\lim_{t\to+\infty}\int_1^t (-xe^{-x^2}+xe^{-x})\,dx$ existe et est fini. On a

$$\int_1^t(-xe^{-x^2}+xe^{-x})\,dx = \left[+\frac12 e^{-x^2} - xe^{-x}\right]_1^t + \int_1^t e^{-x}\,dx$$

$$= \left[+\frac12 e^{-x^2} - xe^{-x} - e^{-x}\right]_1^t = \underbrace{+\frac12 e^{-t^2} - te^{-t} - e^{-t}}_{\to 0 \text{ si } t\to+\infty} - \frac12 e^{-1} + e^{-1}$$ (par application du théorème de l'Hospital)

$$+ e^{-1}\ \cancel{-\frac{3}{2}e^{-1}}$$

Donc $\lim_{t\to+\infty}\int_1^t(-xe^{-x^2}+xe^{-x})\,dx = +\frac{3}{2e}$ Comme la limite est finie, f_2 est intégrable sur $[1,+\infty[$

Dès lors, f est intégrable sur A et $\iint_A xe^{-y}\,dxdy = \frac{3}{2e}$

7. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

a) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{m/2}}$ b) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^m}{m!}$ c) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}$ d) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)}$

a) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{m/2}} = \cancel{\frac{1}{\pi^{1/2}}} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}^m} = \cancel{\frac{1}{\pi^{1/2}}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^m$

C'est donc une série géométrique de raison

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \in]-1,1[$ $\overset{\text{donc}}{\Rightarrow}$ la série converge et sa somme vaut

$\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}-1}$

b) Il s'agit de la série ~~déterminant~~ ~~exp(ln 2)~~. ①

Cette série est une série convergente et sa somme vaut $2-1 = 1$.

c) Par le critère de comparaison, la série diverge ②

d) La série ~~converge car le terme général tend vers 0 donc la somme vaut 0~~. ③ Aucun sens.

① $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^m}{m!} - \frac{(\ln 2)^0}{0!} = \exp(\ln 2) - 1$ par définition de l'exponentielle.

② En effet, $\frac{m!}{m^2} = \frac{(m-1)!}{m} \geq \frac{1}{m}$ $\forall m \geq 1$.
Comme $\frac{1}{m}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente, par le critère de comparaison, la série donnée diverge

③ On a $\frac{1}{m(m+1)} = \frac{A}{m} + \frac{B}{m+1}$ où A et B sont des réels uniques à déterminer
Donc $1 = A(m+1) + B(m)$ $\forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A = 1$ et $B = -1$.
Dès lors, $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$
Comme $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$, la série donnée converge et sa somme vaut 1.