Mathématiques générales A
Examen du lundi 6 janvier 2014

CORRIGE

Théorie

Question 1.
(a) **Enoncer le « Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) ».**
(b) **Utiliser ce théorème pour démontrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair s'annule toujours en au moins un réel.**

Pour une réponse « type », voir notes de cours.

Question 2.
(a) **Définir la notion de fonction croissante sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$.**
(b) **Enoncer le « Théorème des accroissements finis (TAF) » sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$.**
(c) **Soit f une fonction à valeurs réelles, dérivable sur $I =]a, b[$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la dérivée de f pour que f soit croissant sur I.**
(d) **Démontrer que la condition donnée au point précédent est bien nécessaire et suffisante pour assurer la croissance de f sur I.**

Pour une réponse « type », voir notes de cours.

Question 3. **Enoncer et démontrer la formule donnant l'expression explicite du produit scalaire de deux vecteurs utilisant les composantes de ces vecteurs.**

Pour une réponse « type », voir notes de cours.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[0, 2\pi]$, résoudre l'équation suivante**

$$1 + \cos(2x) = 2\,\mathrm{cotg}(x).$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et est équivalente à

$$2\,\cos^2(x)\sin(x) = 2\,\cos(x) \Leftrightarrow \cos(x)(2\,\sin(x)\cos(x) - 2) = 0 \Leftrightarrow \cos(x)(\sin(2x) - 2) = 0$$

puisque $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$, $\mathrm{cotg}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ et $\sin(2x) = 2\,\sin(x)\cos(x)$.
Comme $\sin(2x)$ est toujours différent de 2, l'équation est équivalente à

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$.

(b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$(*)\ \ e^{\ln(e)}, \qquad (**)\ \ \cos\left(\arcsin(\frac{3}{5})\right), \qquad (***)\ (1+i)^4$$

Solution. (*) La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ et $\mathrm{im}(\ln) = \mathbb{R} = \mathrm{dom}(\exp)$; l'expression est donc définie. Comme ces fonctions sont inverses l'une de l'autre, on a $\exp(\ln(e)) = e$.

(**) La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$, $\frac{3}{5} \in [-1,1]$ et $\text{dom}(\cos) = \mathbb{R}$. Dès lors, l'expression donnée est définie.
Comme $\arcsin(\frac{3}{5}) = y \Leftrightarrow \sin(y) = \frac{3}{5},\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et comme $\cos(y) \geq 0$ si $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, par la formule fondamentale de la trigonométrie on obtient

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Dès lors, $\cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \cos\left(\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{4}{5}$.

(***) On peut élever un nombre complexe à une puissance naturelle quelconque et on a $(1+i)^4 = (1+i^2+2i)^2 = 4i^2 = -4$ puisque $i^2 = -1$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(*)\ \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad (**)\ \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(2x)}{x-\pi}.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
Comme $\ln\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\ln(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}_0$, la limite demandée est $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\lim_{x\to-\infty} \ln(|x|)$.
Par application du théorème relatif à la limite d'une fonction composée, on a successivement

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(|x|) = \lim_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty.$$

Dès lors, la limite demandée vaut $-\infty$.

(**) La fonction $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{\pi\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant π rencontre A, le calcul de la limite en π peut être envisagé.
Pour lever l'indétermination "$\frac{0}{0}$", on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées. En effet, si $V =]\pi-\varepsilon, \pi[\cup]\pi, \pi+\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ assez petit), on a
1) $f : x \mapsto \sin(2x)$ et $g : x \mapsto x - \pi$ sont dérivables dans $\mathbb{R}$ donc dans V
2) $Dg(x) = 1 \neq 0$ dans V
3) $\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} g(x) = 0$ car $\lim_{x\to\pi}(2x) = 2\pi$ et $\lim_{y\to2\pi} \sin(y) = \sin(2\pi) = 0$
4) $\lim_{x\to\pi} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{2\cos(2x)}{1} = 2\cos(2\pi) = 2$
Dès lors, la limite cherchée vaut 2.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(*)\ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x)\sin(x)\ dx, \qquad (**)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)}\ dx.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Cela étant, comme $D\sin(x) = \cos(x)$, on a

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x)\sin(x)\ dx = \left[\frac{\sin^2(x)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin^2(\frac{\pi}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{4})\right) = \frac{1}{4}.$$

Autre méthode : comme $\sin x \cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, on a

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x)\sin(x)\ dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\left(\cos(\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}.$$

(**) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(1+x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$ donc sur $[1, +\infty[$, ensemble non borné ; de plus, elle est positive sur cet ensemble.
Décomposons la fraction donnée en une somme de fractions simples ; on a

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)},\ x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$$

ce qui donne $A = 1$ et $B = -1$.
Pour tout $t > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, continue sur $[1, t]$, est intégrable sur $[1, t]$ et on a

$$\int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\, dx = \Big[\ln(x) - \ln(x+1)\Big]_1^t = \left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^t = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x(x+1)}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + \ln(2) = \ln(2),$$

l'application du théorème de la limite d'une fonction composée donnant

$$\lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) = \lim_{y\to 1} \ln(y) = 0.$$

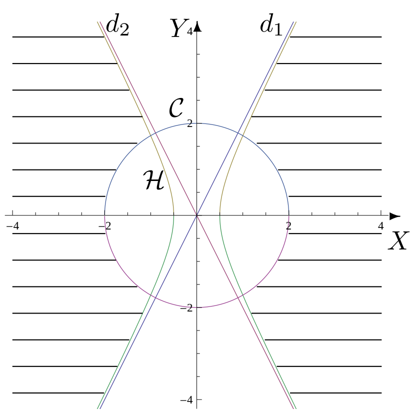
Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ est à valeurs positives sur $[1, +\infty[$ et que la limite précédente est finie, la fonction est intégrable et la valeur de son intégrale sur $[1, +\infty[$ vaut $\ln(2)$.

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 - 1 \geq y^2 \geq 4 - x^2\right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des « bords » étant compris dans l'ensemble.

On note $d_1 : y = 2x,\ d_2 : y = -2x,\ \mathcal{C} : x^2 + y^2 = 4$ et $\mathcal{H} : 4x^2 - y^2 = 1$.



5. **(a) Que vaut la dérivée de la fonction suivante en tout réel non nul ?**

$$x \mapsto \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solution. La fonction donnée est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_0$. En appliquant les théorèmes de dérivation, on obtient

$$D(\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)) = D\operatorname{arctg}(x) + D\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\ .\ (-\frac{1}{x^2}) = 0.$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle

$$D^2 f - f = 1 + x^2$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) - f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 - 1$ dont les zéros sont -1 et 1. Il s'ensuit que les solutions réelles de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 2 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 0$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax^2 + Bx + C,\ x \in \mathbb{R}$ où A, B et C sont des constantes à déterminer. Comme $Df_P(x) = 2Ax + B$ et $D^2 f_P(x) = 2A$, on a $2A - Ax^2 - Bx - C = 1 + x^2 \Leftrightarrow A = -1,\ B = 0$ et $C = -3$.
Ainsi, $f_P(x) = -x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1\, e^{-x} + c_2 e^{x} - x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un chimiste a 10 centilitres d'une solution qui contient une concentration d'acide à 20 %***. Combien de millilitres d'acide pur doit-il ajouter pour obtenir une concentration à*** 40 % ***?***

Solution. La solution donnée contient $10\ .\ 0,2 = 2$ cl $= 20$ ml d'acide pur. Si on note x le nombre de ml d'acide pur à ajouter, comme 10 cl = 100 ml, on a l'équation

$$20 + x = 0,4(100 + x) \Leftrightarrow 20 + x = 40 + 0,4x \Leftrightarrow 0,6x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{100}{3}.$$

On doit donc ajouter $\frac{100}{3} \approx 33,33$ ml d'acide pur à la solution donnée pour obtenir une concentration à 40 %.

Exercices BIS

1. **Résoudre l'inéquation suivante (x est l'inconnue réelle)**

$$x\ |2 - x|\ \leq\ x^2$$

Solution. Tout réel négatif x est solution puisque le premier membre de l'inéquation est négatif tandis que le second est positif.
Considérons $x > 0$. L'inéquation est alors équivalente à $|2 - x| \leq x$.
Si $x \in]0, 2],\ |2 - x| = 2 - x$ et l'inéquation s'écrit $2 - x \leq x \Leftrightarrow x \geq 1$.
Si $x \in [2, +\infty[,\ |2 - x| = x - 2$ et l'inéquation s'écrit $x - 2 \leq x$, inégalité vraie pour tout réel.
Dès lors, l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

2. **Si x désigne un réel de l'intervalle $\left]3\pi, \frac{7\pi}{2}\right[$ et si $\mathrm{tg}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que valent les nombres**

$$\mathrm{cotg}(x),\ \sin(x),\ \cos(x)?$$

Solution. Pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{cotg}(x) = 1/\mathrm{tg}(x)$. Dès lors, $\mathrm{cotg}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
Comme $\mathrm{tg}^2(x) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, on obtient d'abord $\cos^2(x) = \frac{2}{3}$. Ensuite, comme $\cos(x) < 0$ puisque $x \in \left]3\pi, \frac{7\pi}{2}\right[$, on obtient $\cos(x) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.
Enfin, comme $\sin(x) = \mathrm{tg}(x)\cos(x)$, on a $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{\sqrt{6}}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.