1, 2, 3... Sciences

Année académique 2013-2014

Corrigé de l'examen de math A du 18 Août 2014

Version 26 août 2014

$\boxed{\textit{Théorie}}$

Question 1.

(a) **Définir la continuité d'une fonction en un point de son domaine de définition.**

(b) **Définir la dérivabilité d'une fonction en un point d'un intervalle ouvert où elle est définie.**

(c) **Quel est le lien entre la notion de continuité et de dérivabilité en un point ? Énoncer et démontrer.**

Réponses. Voir cours.

Question 2.

(a) **Énoncer le théorème des accroissements finis en toute généralité.**

Réponse. Voir cours.

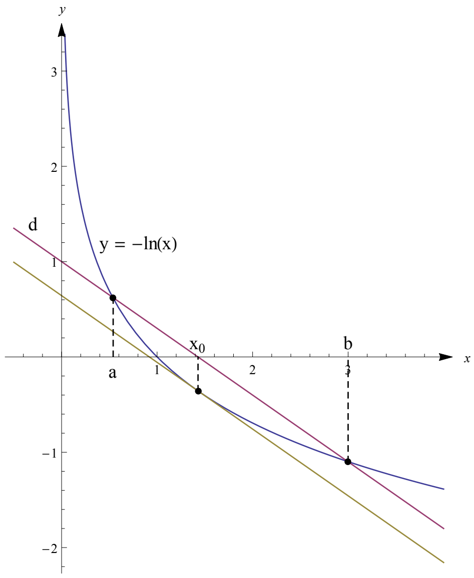
(b) **Appliquer ce théorème au cas de la fonction $x \mapsto \ln(\frac{1}{x})$.**

Réponse. Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$. Celle-ci est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Vu le TAF, on peut donc affirmer que pour tous $a, b \in]0, +\infty[$ tels que $a < b$, il existe $x_0 \in]a, b[$ vérifiant l'égalité suivante :

$$\frac{\ln a - \ln b}{b - a} = Df(x_0) = -\frac{1}{x_0}.$$

(c) **Tracer le graphique de cette fonction dans un repère orthonormé et donner une interprétation graphique du théorème.**

Réponse. Voici une représentation du graphique de f.



Interprétation graphique : Le TAF affirme que, pour toute droite d intersectant le graphique de f en deux points d'abscisses $a, b \in]0, +\infty[$ telles que $a < b$, il existe une tangente au graphique de f qui est parallèle à d et dont le point de tangence a une abscisse comprise entre a et b.

$\boxed{\textit{Exercices}}$

1. (a) **Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi/2, \pi]$, résoudre l'équation suivante**

$$\sin(5x) + \sin(x) + 2\sin^2(x) = 1.$$

Solution. Vu que

$$\sin(5x) + \sin(x) = 2\sin(3x)\cos(2x) \quad \text{et} \quad 1 - 2\sin^2(x) = \cos(2x)$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$, l'équation donnée est équivalente à la suivante :

$$2\sin(3x)\cos(2x) = \cos(2x).$$

Cette dernière égalité a lieu si et seulement si

$$\cos(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad 2\sin(3x) = 1.$$

Or, on a

▷ $\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$;

▷ $2\sin(3x) = 1 \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$.

Les réels de l'intervalle $[\pi/2, \pi]$ vérifiant l'équation donnée sont donc $\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}$.

(b) **Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes**

$$(i)\ \operatorname{cotg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right), \qquad (ii)\ \exp(-3\ln(2)).$$

Solution. Les deux expressions données sont définies et on a les égalités suivantes :

(i) $\operatorname{cotg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$,

(ii) $\exp(-3\ln(2)) = \exp(\ln(2^{-3})) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

(c) **Si $w = 1 - i$, calculer la partie imaginaire de $\dfrac{w}{1-w}$.**

Solution. On a, par définition de w,

$$\frac{w}{1-w} = \frac{1-i}{1-(1-i)} = \frac{1-i}{i} = -1 - i.$$

La partie imaginaire demandée est donc -1.

2. **Si elles existent, calculer les limites suivantes**

$$(a)\ \lim_{x \to 1^+} (x-1)\ln(x^2-1), \qquad (b)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Solution. (a) Le domaine de définition de la fonction

$$f : x \mapsto (x-1)\ln(x^2-1)$$

est $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. On voit que $]1, 1+\varepsilon[\cap \operatorname{dom} f \neq \varnothing$, quel que soit $\varepsilon > 0$. La limite donnée est donc envisageable.

Pour la calculer, on utilise les égalités suivantes, valables pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned}(x-1)\ln(x^2-1) &= (x-1)\ln[(x-1)(x+1)] \\ &= (x-1)[\ln(x-1) + \ln(x+1)] \\ &= (x-1)\ln(x-1) + (x-1)\ln(x+1).\end{aligned}$$

Dès lors, la limite demandée vaut

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1^+} (x-1)\ln(x-1) + \lim_{x \to 1^+} (x-1)\ln(x+1) &= \lim_{x \to 1^+} (x-1)\ln(x-1) + 0 \cdot \ln(2) \\ &= \lim_{t \to 0^+} t\ln(t).\end{aligned}$$

Cette dernière limite est connue et vaut 0. Ainsi, la limite demandée existe et est nulle.

(b) Le domaine de définition de la fonction

$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

est $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Comme il n'est pas minoré, la limite donnée est envisageable.
Maintenant, montrons qu'elle existe et calculons sa valeur. On a, quel que soit $x \in]-\infty, 0[$,

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = -1$, la limite demandée existe et vaut -1.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum**

$$(a)\ \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x(x^2+1)}\ dx, \qquad (b)\ \int_1^{e} \frac{1}{x}\ \ln(x)\ dx.$$

Solution. (a) Montrons que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x-1}{x(x^2+1)}$$

est intégrable sur $]1, +\infty[$ et calculons l'intégrale demandée en utlisant la définition d'une intégrale sur un intervalle non borné. Comme la fonction f est continue sur $[1, +\infty[$, elle est intégrable sur les intervalles (fermés et bornés) de la forme $[1, t]$, avec $t \geq 1$. De plus, on a [1]

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{x^2+1},$$

quel que soit $x \in [1, +\infty[$. Ainsi, une primitive de f sur $[1, +\infty[$ est donnée par

$$\int f(x)\ dx = -\ln(|x|) + \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + \operatorname{arctg}(x) = -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x).$$

Donc, pour tout $t \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^t f(x)\ dx &= \left[-\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x)\right]_1^t \\
&= -\ln(t) + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \operatorname{arctg}(t) - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + \operatorname{arctg}(t) - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t f(x)\ dx = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Comme cette limite existe et est finie et que la fonction f est positive sur $[1, +\infty[$, on conclut que f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que l'intégrale demandée vaut $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

(b) La fonction

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$$

étant continue sur $]0, +\infty[$, elle est intégrable sur tout ensemble fermé et borné inclus dans $]0, +\infty[$. En particulier, elle l'est sur $[1, e]$. Ensuite, comme $\frac{1}{x} = (D\ln)(x)$, il est clair qu'une primitive de f est donnée par

$$x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{2}.$$

1. Pour le voir on peut utiliser le théorème de décomposition en fractions simples.

L'intégrale demandée vaut donc

$$\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e = \frac{\ln^2(e)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante :**

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 4-4y^2 < x^2 < -y\right\}.$$

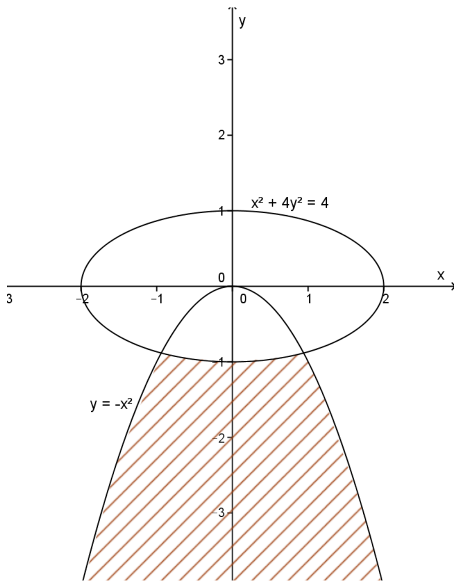
Solution. L'ensemble à représenter est l'ensemble $A \cap B$ où

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 > 4\} \quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x^2\}.$$

Sachant que

- ▷ $x^2+4y^2=4$ est une équation cartésienne d'une ellipse dont les intersections avec les axes sont les points de coordonnées $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ et
- ▷ $y=-x^2$ est une équation cartésienne d'une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées et dont le sommet a pour coordonnées $(0,0)$,

une représentation de l'ensemble donné est la suivante (les points de bord n'étant pas compris dans la partie hachurée).



5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2f(x) - Df(x) - 2f(x) = e^{2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une EDLCC (d'ordre 2). Comme la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, cette équation admet des solutions et elles sont toutes infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour les décrire, procédons en trois étapes.

ÉTAPE 1 : On cherche d'abord les solutions de l'EDLCC homogène (d'inconnue f) :

$$D^2f(x) - Df(x) - 2f(x) = 0. \qquad (*)$$

Le polynôme caractéristique de cette équation est le polynôme P défini par

$$P(z) = z^2 - z - 2.$$

Les zéros de P étant 2 et -1, les solutions de l'équation (*) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto c_1e^{2x} + c_2e^{-x}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

ÉTAPE 2 : On cherche ensuite une solution de l'EDLCC donnée. Le second membre de cette dernière est de la forme $Q(x)e^{2x}$ où Q est le polynôme constant $x \mapsto 1$. De plus, 2 est un zéro de multiplicité 1 du polynôme caractéristique de l'équation homogène. On sait donc que l'EDLCC donnée admet une solution de la forme

$$S : x \mapsto Axe^{2x}, \quad (A \in \mathbb{C}),$$

En calculant les première et deuxième dérivées de S et en utilisant le fait que cette fonction vérifie l'équation donnée, on obtient

$$D^2S(x) - DS(x) - 2S(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 3Ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{3},$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $x \mapsto \frac{x}{3}e^{2x}$ est une solution de l'équation donnée.

ÉTAPE 3 : Au final, l'ensemble des solutions de l'équation donnée est

$$\{x \mapsto \left(c_1 + \frac{x}{3}\right) e^{2x} + c_2 e^{-x} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Pour un budget de 144 EUR, un groupe de copains peut aller visiter une exposition. S'ils avaient été quatre en plus, ils auraient utilisé le même budget en bénéficiant d'un tarif de groupe donnant droit à 3 EUR de réduction par entrée. Quel est le prix plein de l'entrée à cette exposition ?

Solution. Pour mettre en équation le problème, notons p le prix d'une entrée à l'exposition et n le nombre de copains dans le groupe. Les informations données dans l'énoncé se réécrivent alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} 144 = pn \\ 144 = (n+4)(p-3) \end{cases}, \quad (p > 0, n \in \mathbb{N}).$$

Les équations ci-dessous impliquent que p vérifie l'équation

$$\left(\frac{144}{p} + 4\right)(p-3) = 144 \Leftrightarrow p^2 - 3p - 3 \cdot 36 = 0.$$

Le réalisant de cette équation étant égal à 21^2, ses solutions (réelles) sont 12 et -9. Comme p a été supposé strictement positif, on trouve $p = 12$. On en conclut que le prix d'une entrée à l'exposition est de 12 euros.