1, 2, 3...Sciences

Année académique 2013-2014

Corrigé de l'interrogation de math du 4 novembre 2013

Version 2 novembre 2013

1. **(i) Quel est le domaine de définition de la fonction cosinus ?**
   (ii) Comment définit-on géométriquement le cosinus du réel -4 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.

   Solution. Voir cours.

2. **(i) Démontrer que la valeur absolue de la somme de deux réels est toujours inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ceux-ci.**

   Solution. Voir cours.

   (ii) Déterminer les solutions réelles (x) de l'inéquation suivante

$$|x+1| \geq x^2 - 1$$

   Solution. Si $x \leq -1$, l'inéquation est équivalente à

$$-(x+1) - (x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(1+x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

   Comme $x \leq -1$, la seule solution est $S_1 = \{-1\}$.

   Si $x \geq -1$, l'inéquation est équivalente à

$$(x+1) - (x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(1-x+1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

   Comme $x \geq -1$, l'ensemble des solutions est $S_2 = [-1, 2]$.

   Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = S_1 \cup S_2 = [-1, 2]$.

3. **Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation**

$$2\sqrt{3}\cos^2(x) = \sin(2x)$$

   Solution. Comme $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, l'équation est équivalente à

$$\cos(x)(\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 0.$$

   La première équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
   En divisant les 2 membres de la deuxième équation par $\cos(x) \neq 0$ dans cette équation, on a

$$\operatorname{tg}(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

   Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont donc $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

4. **(i) Dans une base orthonormée de l'espace $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, on considère 2 vecteurs $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3}$. Déterminer les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{b}$.**
   (ii) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne la droite d d'équation cartésienne $x + 2y = 1$. Déterminer des équations paramétriques de d. .

   Solution. Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ont respectivement pour composantes $(2, 0, -1)$ et $(1, -3, -2)$.
   (i) Dès lors,

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = 2 + 0 + 2 = 4 \text{ et } ||\overrightarrow{b}||^2 = 1^2 + (-3)^2 + (-2)^2 = 14$$

et les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{b}$ sont $\frac{2}{7}(1,-3,-2)=\left(\frac{2}{7},-\frac{6}{7},-\frac{4}{7}\right)$.

(ii) Un vecteur directeur de d a pour composantes $(2,-1)$ et un point de d a pour coordonnées $(1,0)$. Dès lors, des équations paramétriques de d sont données par

$$\left\{\begin{array}{l} x=2r+1 \\ y=-r \end{array}\right. ,r\in\mathbb{R}$$

par exemple.

5. **Déterminer le module, les partie réelle et imaginaire du complexe** $z=\dfrac{1}{(1+i)^2}$

Solution. Comme $z=\dfrac{1}{2i}=\dfrac{-i}{2}$, on a

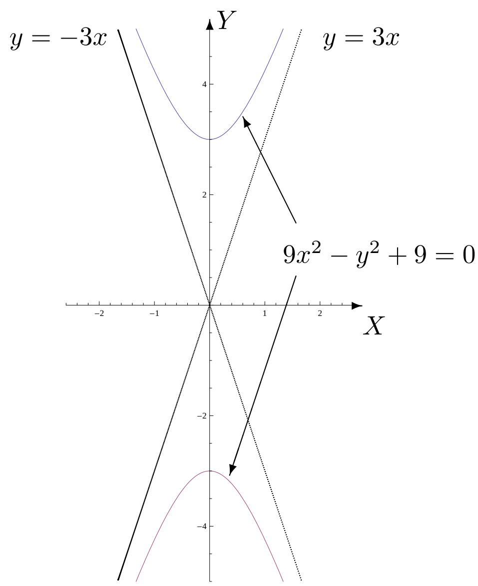
$$|z|=\frac{1}{2},\ \Re z=0 \quad \text{et} \quad \Im z=-\frac{1}{2}.$$

6. **On se place dans un repère orthonormé et on considère l'équation cartésienne suivante**

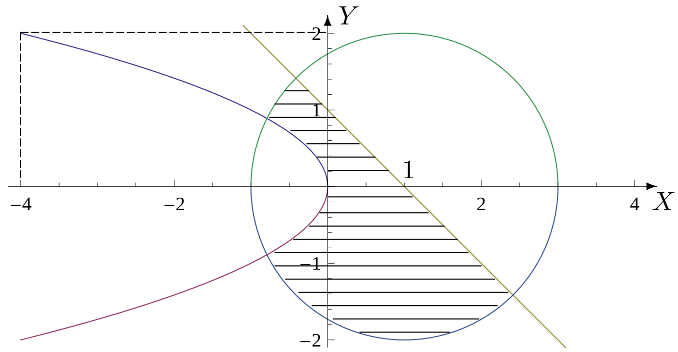
$$9x^2-y^2+9=0$$

Représenter graphiquement l'ensemble des points que cette équation détermine. S'il s'agit d'une conique, en préciser le type, l'excentricité et les coordonnées du(des) foyer(s).

Solution. L'équation $9x^2-y^2+9=0$ est celle d'une hyperbole dont l'excentricité vaut $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$, dont les coordonnées des foyers sont $(0,\sqrt{10})$ et $(0,-\sqrt{10})$ et dont voici la représentation graphique



7. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré.**



La parabole a pour équation cartésienne $y^2 = -x$, le cercle centré au point de coordonnées $(1, 0)$ et de rayon 2 a pour équation cartésienne $(x-1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ et la droite a pour équation cartésienne y =1-x.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq -x,\ x^2 + y^2 - 2x - 3 \leq 0,\ y \leq 1 - x\}.$$

8. **Sur une carte à l'échelle 1/2500, le diamètre d'un lac circulaire mesure 4 cm. Quelle est l'aire réelle de ce lac en ha ? (On prendra 3 comme valeur approchée de π)**

Solution.
Données : lac circulaire de diamètre 4 cm sur la carte
échelle de la carte 1/2500
valeur approximative de π : 3

Inconnues : aire réelle de ce lac en ha

Longueur du rayon du lac sur la carte : 4 : 2 = 2 cm
Longueur réelle du rayon du lac : 2 . 2 500 = 5 000 cm = 0,5 hm
Aire réelle du lac en ha : $3\ .\ 0,5^2 = 0,75$ ha.