1, 2, 3...Sciences

Année académique 2013-2014

Exercices de mathématique
Exercices récapitulatifs : correction

Version 11 décembre 2013

Exercices divers

1. **Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [2\pi, 3\pi]$)**
   (a) $2x(x-1) = |x-1|$
   (b) $\dfrac{|2-x|}{x^2-4} \geq x-2$
   (c) $\sin(2x)\cos(x) = \sin(x)$
   (d) $\cos(2x) \leq \cos(x)$

   Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :
   (a) $S = \{1,\ -1/2\}$
   (b) $S =]-\infty, -2[\ \cup\ [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup\ ]2, \sqrt{5}]$
   (c) $S = \left\{2\pi,\ 3\pi,\ \dfrac{9\pi}{4},\ \dfrac{11\pi}{4}\right\}$
   (d) $S = \left[2\pi,\ \dfrac{8\pi}{3}\right]$

2. **Si c'est possible, simplifier au maximum les expressions suivantes :**
   (a) $\sin(\ln(e^{-\pi/6})) + \cos(\text{tg}\ (-\pi/3))$
   (b) $\arccos(1 - \sin(5\pi/6)) + \arcsin(\sin(7\pi/6))$

   Solution. La première expression vaut $-\dfrac{1}{2} + \cos(\sqrt{3})$ et la deuxième vaut $\frac{\pi}{6}$.

3. **Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(1,-1,3)$, $B(-1,2,1)$ et $C(3,2,-1)$. Calculer**
   (a) $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
   (b) **les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$**
   (c) les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{BC}$ sur $\overrightarrow{AC}$.

   Solution. Le produit scalaire vaut -8, les composantes du produit vectoriel sont $(-6,\ -12,\ -12)$ et les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{BC}$ sur $\overrightarrow{AC}$ sont $\dfrac{16}{29}(2,\ 3,\ -4)$.

4. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x-3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{|1-x|}{\sqrt{1+x^2}}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \text{arctg}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\exp(2x)-1}{x}$
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(\ln(2x+5) - \ln(2x))$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\ln(2x+5) - \ln(2x))$

   Solution. Les limites peuvent toutes être envisagées sauf $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(\ln(2x+5) - \ln(2x))$ puisque le domaine de définition de la fonction est minoré.
   Elles valent respectivement 1, 1, $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$, 2 et 0^+.

5. **Où la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-4x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.**

   Solution. La fonction est définie sur $[-1/2, 1/2]$ et dérivable sur $]-1/2, 0[\ \cup\ ]0, 1/2[$; sa dérivée première est la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}} & \text{si } x \in]-1/2, 0[\\ \dfrac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} & \text{si } x \in]0, 1/2[\end{cases}$$

6. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.**
   (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(4x)}{x}\ dx$
   (b) $\int_{-\infty}^0 x\,e^{2x}\ dx$
   (c) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{2+x}\ dx$
   (d) $\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\ dx$
   (e) $\displaystyle\int_4^5 \frac{2}{x(x^2-4x+4)}\ dx$

   Solution. Toutes les fonctions sont intégrables sur l'intervalle considéré sauf la fonction $x \mapsto \frac{1}{2+x}$ qui n'est ni intégrable en $+\infty$, ni intégrable en -2. Les intégrales valent respectivement

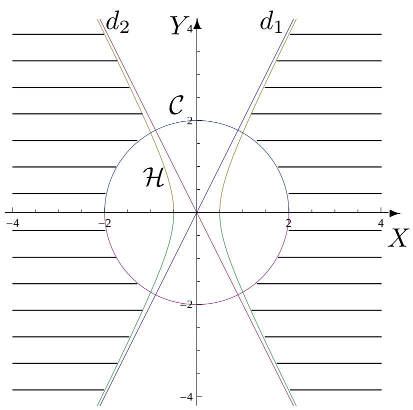
   (a) $\dfrac{1}{2} + 2\ln 2$ (b) $-\dfrac{1}{4}$ (d) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (e) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{6}\right) + \dfrac{1}{6}$

7. **Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.**
   (a) $x^2 + 3 = 2ix$
   (b) $8 - x^3 = 0$

   Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :
   (a) $S = \{-i,\ 3i\}$ (b) $S = \{2,\ -1-i\sqrt{3},\ -1+i\sqrt{3}\}$

8. **Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante**
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 - 1 \geq y^2 \geq 4 - x^2\}.$$

   Solution. On note $d_1 : y = 2x,\ d_2 : y = -2x,\ \mathcal{C} : x^2 + y^2 = 4$ et $\mathcal{H} : 4x^2 - y^2 = 1$.



   Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

9. **Résoudre l'équation suivante en spécifiant dans quel intervalle on travaille**
$$D^2 f(x) + f(x) = x + \sin(x) + \frac{1}{\cos(x)}$$

   Solution. Les solutions sont les fonctions
$$f(x) = (C_1 + \ln(|\cos(x)|))\cos(x) + (C_2 + x)\sin(x) + x - \frac{x}{2}\cos(x),\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

   C_1 et C_2 étant des constantes complexes arbitraires.

Problèmes élémentaires

1. **La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par**

   (a) $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$ **si cette voiture est équipée de freins normaux**

   (b) v **si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.**

   Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

   Solution. La voiture équipée de freins ABS est plus performante pour des vitesses strictement supérieures à 50 km/h.

2. **Un homme se promenant sur une route vit venir à lui d'autres hommes et il leur dit "J'aurais aimé que vous soyez deux fois autant que vous êtes, plus la moitié de la moitié de ce double, plus la moitié de ce dernier nombre. Ainsi avec moi vous seriez 100."**
   Qu'il dise celui qui le peut, combien étaient les hommes qu'il a vu venir à lui. (Alcuin, 8 ème siècle)

   Solution. L'homme qui se promène a vu venir à lui 36 hommes.

Maths en sciences

1. **La pression de la vapeur d'eau saturée dépend de la température suivant une loi de la forme $p = aT^2 + bT + c$ (a, b, c étant réels). Nous disposons des valeurs suivantes :**

T (C)	**0**	**10**	**20**
p (Torr)	**4.6**	**9.2**	**17.5**

   Calculer les coefficients a, b et c.

   Solution. Les coefficients a, b et c valent respectivement $0,0185$, $0,275$ et $4,6$.

2. **Il a été prouvé expérimentalement que le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la formule $m(t) = m_0 e^{-0,000436\,t}$, où m_0 représente la masse initiale du radium et $m(t)$ sa masse après t années. Calculer la "période de désintégration" du radium, c'est-à-dire le laps de temps pendant lequel se désintègre la moitié de la masse initiale (N.B. : $\ln 2 \approx 0,7$).**

   Solution. Comme $\ln 2 \approx 0,7$, la période de désintégration du radium vaut $\dfrac{\ln(2)\ .\ 10^4}{4,36} \approx 1606$ années.

3. **Un point matériel se déplace à la vitesse $v = 2t+4$ cm/s. Calculer la distance parcourue après les 10 premières secondes si le temps t est exprimé en secondes.**

   Solution. Après les 10 premières secondes, le point a parcouru 140 cm.

4. **En physique, le travail exercé par une force F pour déplacer un point matériel d'un point P_1, situé à une distance d_1 de son point d'application, à un point P_2, situé à une distance d_2 de son point d'application, est donné par l'intégrale suivante :**

$$W = \int_{d_1}^{d_2} F(x)dx.$$

   Fort de ce constat, soient deux charges électrique $e_1 = 1$ et $e_2 = e$, distantes entre elles de x. La loi de Coulomb affirme que la charge e agit sur la charge unité avec une force de valeur absolue égale à $\frac{e}{x^2}$. Calculer le travail W de cette force lorsque la charge unité se déplace d'un point P_1 situé à la distance r de cette charge e jusqu'à un autre point

P_2 où l'éloignement devient égal à R. En déduire le potentiel de la charge e au point P_1 (sachant que le potentiel est égal à la limite du travail W lorsque R tend vers $+\infty$).

Solution. Le travail de la force pour le déplacement considéré de la charge unité vaut $\dfrac{(R-r)e}{Rr}$. Le potentiel de la charge e au point P_1 vaut e/r.

5. **Soit un ressort à boudin qui s'allonge de 1 mm pour un effort de traction de $30\,N$. Calculer le travail qu'il faut développer pour allonger le ressort de $20\,mm$, sachant que la force de traction est à chaque instant proportionnelle au déplacement.**

   Solution. Le travail à développer pour allonger le ressort de $20\,mm$ vaut $6\,J$.

QCM

1. Le carré d'un nombre complexe est toujours
   (a) un nombre positif
   (b) un nombre négatif
   (c) un nombre imaginaire pur
   ♣ aucune réponse correcte
2. La partie réelle du produit de deux nombres complexes est toujours égale
   (a) au produit des parties réelles de ces nombres
   (b) à la somme des parties réelles de ces nombres
   (c) à la somme de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
   (d) au produit de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
   ♣ aucune réponse correcte
3. La valeur absolue de la somme de deux réels est toujours
   (a) inférieure ou égale à la différence entre les valeurs absolues de ces réels
   ♣ inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
   (c) supérieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
   (d) supérieure ou égale à la moitié du produit de ces réels
   (e) aucune réponse correcte
4. Si f est définie sur $\mathbb{R}$, le graphique de $F(x) = f(-x),\ x \in \mathbb{R}$ est
   (a) le symétrique du graphique de f par rapport à la première bissectrice
   (b) le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe X
   ♣ le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe Y
   (d) le symétrique du graphique de f par rapport à l'origine
   (e) aucune réponse correcte
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x|^3 < |x|^2$ est l'ensemble
   (a) $[-1, 1[$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
   ♣ $]-1, 1[\setminus\{0\}$
   (d) $]-\infty, -1[$
   (e) aucune réponse correcte
6. Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type $y = mx + p$, $(m, p \in \mathbb{R})$
   (a) vrai
   ♣ faux

7. Le cube d'un réel non nul et de son opposé sont toujours égaux
   (a) vrai
   ♣ faux
8. Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci.
   (a) vrai
   ♣ faux
9. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante
   (a) vrai
   ♣ faux
10. Le domaine de la fonction donnée par $\cos(\cos x)$ est l'intervalle [-1,1]
    (a) vrai
    ♣ faux