1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2013-2014

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'interrogation du 4/11/2013 : correction

Version 28 octobre 2013

I. Problème élémentaire

1. **Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente de 1/15. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 3,36 m^3 de glace ?** (cf. Nov 2008)

   Solution. On doit prendre 3 150 litres d'eau pour obtenir 3,36 m^3 de glace.

2. **Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient un point. S'il ne répond pas, il a 0 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire $0,25$ point. Sachant qu'il ne répond pas à 13 questions et qu'il obtient 45,75 comme cote finale, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?** (cf. Janv 2009)

   Solution. L'étudiant a donné 54 réponses correctes.

3. **Un tonneau rempli aux trois cinquièmes d'eau pèse 125 kg. Rempli aux trois quarts d'eau, il pèse 137 kg. Quelle est la capacité en hectolitres de ce tonneau ?** (cf. Oct 2009)

   Solution. La capacité du tonneau est égale à 0,8 hl.

Manipulations de réels

Résoudre les équations et inéquations suivantes (x est une inconnue réelle)

1. $|4x^2 - 1| = |3x|$ (cf. Nov 2007)
2. $x^2 - 9 \geq 3x\,|x - 3|$ (cf. Oct 2006)
3. $x \geq 27x^4$ (cf. Nov 2007)
4. $|x - 3| \geq |x + 3|$ (cf. Janv 2008)
5. $(3 - x)^2 \leq x - 3$ (cf. Janv 2008)
6. $x|x^2 - 9| \leq 4|x - 3|$ (cf. Janv 2009)
7. $\dfrac{|3 - x|}{x^2 - 9} \geq |x - 3|$ (cf. Oct 2008)
8. $|x^2 - 9| \geq 5$
9. $\dfrac{1}{|2x + 5|} > 3$

Solution. Si S est l'ensemble des solutions, on a

1. $S = \left\{-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ -1,\ 1\right\}$
2. $S = \left]-\infty, -\dfrac{3}{4}\right] \cup \{3\}$
3. $S = \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$
4. $S =]-\infty, 0]$
5. $S = [3, 4]$
6. $S =]-\infty, 1] \cup \{3\}$
7. $S = [-\sqrt{10}, -3[\cup]3, \sqrt{10}]$
8. $S =]-\infty, -\sqrt{14}] \cup [-2, 2] \cup [\sqrt{14}, +\infty[$
9. $S = \left]-\dfrac{8}{3}, -\dfrac{7}{3}\right[\setminus \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

Calcul vectoriel et droites

1. **Dans un repère orthonormé, on donne les droites d_1, d_2 et d_3 dont les équations cartésiennes sont**

$$d_1 : 2x - y + 3 = 0 \qquad d_2 : 5x + 2y - 12 = 0 \qquad d_3 : x + 4y - 24 = 0.$$

(a) **Représenter ces 3 droites.**

(b) **Les droites d_1 et d_2 se coupent au point A. Déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par A et orthogonale à d_3.**

(c) **Donner des équations paramétriques de d_3.**

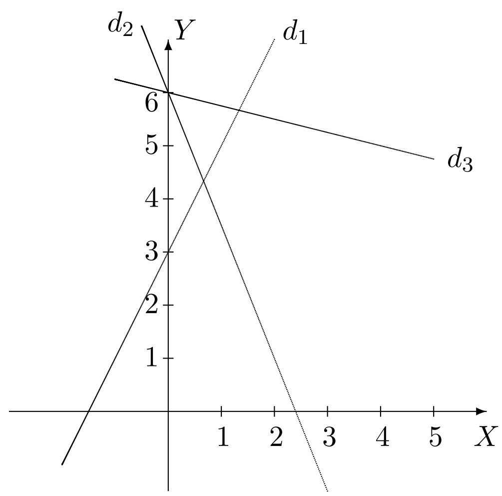
(d) **Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la droite d_2 avec l'axe des abscisses.**

(e) **Le point C de coordonnées $(4, 5)$ appartient-il à d_1 ? à d_2 ? à d_3 ?**

(f) **Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC}$.**

(g) **Déterminer les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur d_1.**

Solution. (a)



(b) En résolvant le système formé par les équations cartésiennes de d_1 et d_2, on obtient les coordonnées cartésiennes $(2/3, 13/3)$ de A. Comme le coefficient angulaire de d_3 vaut $-1/4$ le coefficient angulaire de toute droite orthogonale à d_3 vaut 4. Dès lors, l'équation cartésienne demandée est $12x - 3y + 5 = 0$.

(c) Un vecteur directeur de d_3 a pour composantes $(4, -1)$ et un point de d_3 a pour coordonnées $(0, 6)$. Dès lors, d_3 a, par exemple, pour équations paramétriques cartésiennes
$$\left\{\begin{array}{l} x = 4r \\ y = -r + 6 \end{array}\right., r \in \mathbb{R}.$$

(d) En résolvant le système formé par les équations cartésiennes de d_2 et de l'axe des abscisses, on obtient les coordonnées cartésiennes $(12/5, 0)$ de B.

(e) En remplaçant x par 4 et y par 5 dans les équations des 3 droites, on constate que celles de d_1 et d_2 ne sont pas vérifiées mais bien celle de d_3. Dès lors, le point C appartient à d_3 mais non à d_1 ni d_2.

(f) Les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $(\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ et $(\frac{8}{5}, 5)$. Dès lors, le produit scalaire de ces 2 vecteurs vaut $\frac{26}{3}$.

(g) Un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de d_1 a pour composantes $(1, 2)$ et le carré de sa norme vaut 5. Comme les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont égales à $(\frac{26}{15}, -\frac{13}{3})$, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par

$\overrightarrow{v}$ vaut $-\frac{104}{15}$ et les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur d_1 sont

$$-\frac{104}{75}(1,2) = \left(-\frac{104}{75}, -\frac{208}{75}\right).$$

2. **Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B et C dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement**

$$(-1,1,0) \qquad (2,-1,3) \qquad (0,-4,2).$$

Déterminer les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge 2\overrightarrow{BC}$

Solution. Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $(3,-2,3)$ et $(-4,-6,-2)$. Dès lors, les composantes de $\overrightarrow{AB} \wedge 2\overrightarrow{BC}$ sont $(22,-6,-26)$.

Trigonométrie

1. **Si α désigne un réel de l'intervalle** $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ **et si** $\mathrm{tg}(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$**, que valent les nombres** $\mathrm{cotg}(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ **?** (cf. Oct 2009)

Solution. On a $\mathrm{cotg}(\alpha) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ et $\cos(\alpha) = \dfrac{-2\sqrt{7}}{7}$.

2. **Simplifier** $\dfrac{\cos(\frac{4\pi}{3})}{\sin^2(\frac{7\pi}{3})}$ **.** (cf. Nov 2007)

Solution. L'expression donnée vaut $-2/3$.

3. **Résoudre dans $[\pi, 2\pi]$ (x est une inconnue réelle)**
   (a) $\sin(2x)\cos(2x) = -1$ (cf. Janv 2009)
   (b) $4\sin(2x)\cos(2x) = -1$ (cf. Janv 2009)
   (c) $\sin(2x) = \sin(6x)$ (cf. Oct 2009)
   (d) $4\cos^2(2x) = 3$ (cf. Août 2009)
   (e) $2\cos^2(2x) = \sin^2(4x)$ (cf. Janv 2010)
   (f) $\sin(x)\sin(2x) = \cos(2x)\cos(x) + \frac{1}{2}$ (cf. Mai 2010)

Solution.
(a) Cette équation est impossible.
(b) Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont $\dfrac{31\pi}{24}, \dfrac{35\pi}{24}, \dfrac{43\pi}{24}, \dfrac{47\pi}{24}$.
(c) Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont $\pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi, \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}, \dfrac{13\pi}{8}, \dfrac{15\pi}{8}$.
(d) Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont $\dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{17\pi}{12}, \dfrac{19\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}$.
(e) Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont $\dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}, \dfrac{13\pi}{8}, \dfrac{15\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$.
(f) Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont $\dfrac{10\pi}{9}, \dfrac{14\pi}{9}, \dfrac{16\pi}{9}$.

Coniques et représentations d'ensembles

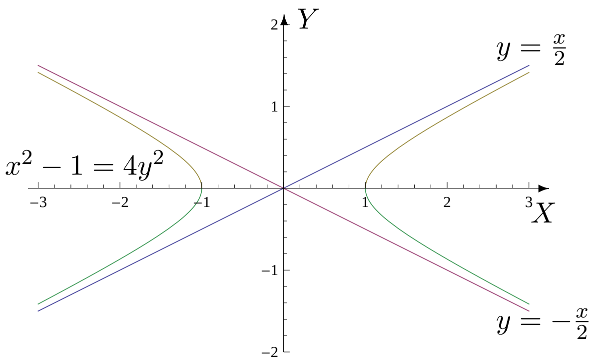
1. **On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques ? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) ? Quelle est leur excentricité ?** (cf. Oct 2009)

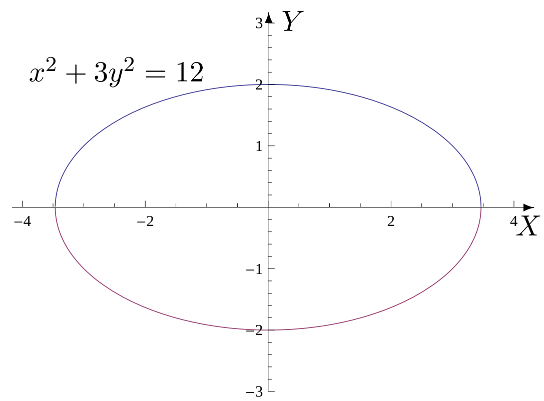
$$x^2 - 1 = 4y^2 \qquad\qquad x^2 + 3y^2 = 12.$$

Solution. L'équation $x^2 - 1 = 4y^2$ est celle d'une hyperbole dont les foyers ont pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ et $\left(\frac{-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ et pour excentricité $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

L'équation $x^2 + 3y^2 = 12$ est celle d'une ellipse dont les foyers ont pour coordonnées $(2\sqrt{2}, 0)$ et $(-2\sqrt{2}, 0)$ et pour excentricité $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Voici la représentation graphique de ces coniques





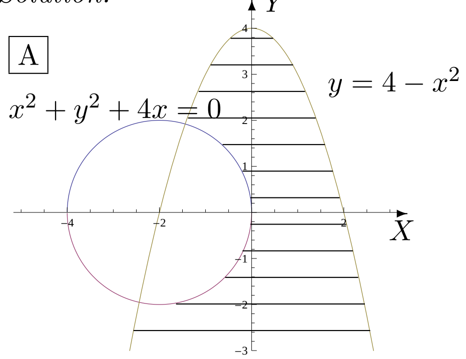
2. **Représenter dans un repère orthonormé en les hachurant les ensembles dont une description analytique est la suivante**

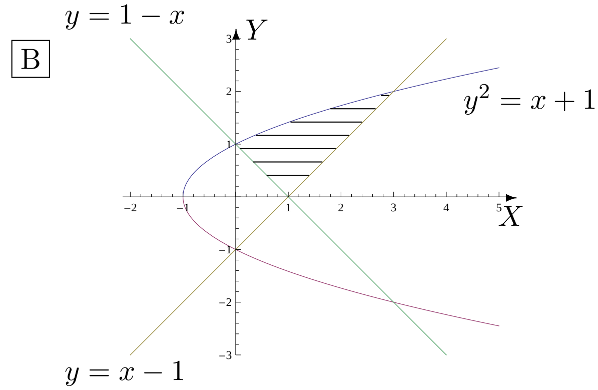
$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 + 4x \geq 0 \text{ et } y \leq 4 - x^2\}.\text{(cf. Nov 2006)}$$

$$B = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ y^2 - 1 \leq x \text{ et } 1 - y \leq x \leq y + 1\}.\text{(cf. Janv 2008)}$$

Pour B donner une description analytique
a) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
b) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.

Solution.





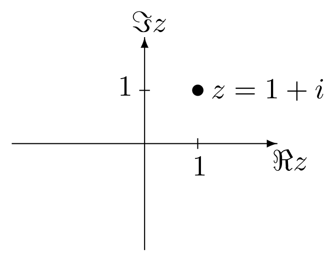
Les points des bords sont compris dans l'ensemble pour les 2 cas.

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [1-x, \sqrt{x+1}]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,3],\ y \in [x-1, \sqrt{x+1}]\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [1-y, y+1]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,2],\ x \in [y^2-1, y+1]\}$$

Nombres complexes

1. **On donne le complexe $z = 1 + i$.**
   a) En déterminer le module et une forme trigonométrique. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (X = "axe réel" et Y = "axe imaginaire")
   b) Que vaut la partie réelle du complexe z^2 ?
   c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe ? Pourquoi ?

   Solution
   a) On a $|z| = \sqrt{2}$ et une forme trigonométrique est donnée par $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$
   b) La partie réelle de z^2 est nulle.
   c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est égale au carré de la partie imaginaire du complexe si et seulement si le complexe est réel ou si sa partie réelle vaut la moitié de sa partie imaginaire.



2. **Déterminer**
   a) le module du complexe $\cos(2) + i\sin(2)$
   b) les parties réelle et imaginaire du complexe $z = \frac{1}{1-2i}$.

   Solution
   a) Le module de ce complexe vaut 1.
   b) La partie réelle de z vaut $1/5$ et sa partie imaginaire vaut $2/5$.

3. **Résoudre dans $\mathbb{C}$**

$$a)\ z^2 - z + 1 = 0 \qquad\qquad b)\ z^2 + 25 = 0$$

   Solution
   Si S est l'ensemble des solutions, on a
   a) $S = \left\{ \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$
   b) $S = \{-5i, 5i\}$