1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2013-2014

Mathématiques générales A : corrigé du test 1

Version 4 octobre 2013

Corrigé du test 1 du 07-10-2013

1. **Un guide demande 288 EUR pour une journée de visite guidée d'un groupe. Cette somme est à partager en parts égales pour chaque participant. Deux jours avant la visite, 4 personnes s'ajoutent au groupe ce qui entraîne pour chaque participant initialement inscrit une diminution du prix de 6 EUR. Combien y a-t-il de participants le jour de la visite ?**

   Solution.
   Données :
   1) on partage 288 euros en parts égales entre les participants
   2) 4 personnes s'ajoutent au groupe et la part de ceux initialement inscrits diminue de 6 euros.
   Inconnue : le nombre de participants le jour de la visite.

   Soit x le nombre de participants le jour de la visite ; le prix à payer par chacun est $\frac{288}{x}$ euros.
   Le nombre d'inscrits initialement est $x-4$ et le prix à payer par chacun alors était $\frac{288}{x-4}$ euros mais aussi $\frac{288}{x}+6$ euros. Dès lors, on a l'équation

   $$\frac{288}{x-4} = \frac{288}{x} + 6 \Leftrightarrow 288\,x = (288 + 6\,x)(x-4)$$

   $$\Leftrightarrow 0 = 6\,x^2 - 4\ .\ 288 - 24\,x \Leftrightarrow x^2 - 4\,x - 4\ .\ 48 = 0$$

   Comme $\Delta = 16 - 4\ .\ (-4\ .\ 48) = 16(1+48) = 28^2$, les solutions de l'équation sont données par

   $$\left(x = \frac{4+28}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{4-28}{2}\right) \Leftrightarrow (x = 16 \quad \text{ou} \quad x = -12)$$

   Ainsi le jour de la visite, il y a 16 participants, la valeur négative -12 étant à rejeter.

2. **a) Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite d d'équation cartésienne $2x+3y-5=0$ ainsi que les points A et B de coordonnées respectives $(1,-1)$ et $(2,3)$. Déterminer un vecteur directeur de d et dire, en justifiant, s'il est orthogonal ou non au vecteur $\overrightarrow{AB}$.**
   b) Dans une base orthonormée de l'espace, on considère les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de composantes respectives $(1,-1,0)$ et $(-1,2,-2)$. Déterminer $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ ainsi que $\theta \in [0,\pi]$ si θ est la mesure de l'angle entre ces deux vecteurs.

   Solution. a) Tout vecteur directeur de d est un multiple non nul du vecteur de composantes $(3,-2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(2-1, 3-(-1)) = (1,4)$. En effectuant le produit scalaire de ces deux vecteurs, on obtient $3-8=-5 \neq 0$ ce qui prouve que ces vecteurs ne sont pas orthogonaux puisque leur produit scalaire n'est pas nul.

   b) Le produit scalaire $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}$ vaut $-1+(-2)+0 = -3$ et le produit vectoriel est le vecteur $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ si $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ sont les vecteurs de la base.

   Comme $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = ||\overrightarrow{a}||\ ||\overrightarrow{b}||\cos(\theta) = -3$, que $||\overrightarrow{a}|| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$ et $||\overrightarrow{b}|| = \sqrt{1+4+4} = 3$, on a $\cos(\theta) = -1/\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On en conclut que $\theta = \frac{3\pi}{4}$ puisque $\theta \in [0,\pi]$.

   On pourrait aussi déterminer θ à partir du produit vectoriel puisque $||\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}|| = ||\overrightarrow{a}||\ ||\overrightarrow{b}||\sin(\theta)$ et que $||\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}|| = \sqrt{4+4+1} = 3$. On a alors $\sin(\theta) = 1/\sqrt{2}$, ce qui donne $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Comme le produit scalaire est négatif, on sait que θ appartient au second quadrant. Dès lors, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Corrigé du test 1 du 11-10-2013

1. **Pour un budget de 144 EUR, un groupe de copains peut aller visiter une exposition. S'ils avaient été quatre en plus, ils auraient utilisé le même budget en bénéficiant d'un tarif de groupe, donnant droit à 3 EUR de réduction par entrée. Quel est le prix plein de l'entrée à cette exposition ?**

   Solution.
   Données :
   1) on partage 144 euros en parts égales entre les visiteurs
   2) si 4 personnes s'ajoutent au groupe, le prix payé par chacun diminue de 3 euros.
   Inconnue : le prix plein de l'entrée.

   Soit x euros le prix plein de l'entrée ; le nombre de visiteurs au départ est donc $\frac{144}{x}$ visiteurs.
   Si le nombre de visiteurs est $\frac{144}{x}+4=\frac{144+4x}{x}$, le prix à payer par chacun est alors $\frac{144\,x}{144+4x}$ euros mais aussi $x-3$ euros. Dès lors, on a l'équation

$$\frac{144\,x}{144+4x}=x-3 \Leftrightarrow 144\,x=(144+4\,x)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 0=4\,x^2-3\,.\,144-12\,x \Leftrightarrow x^2-3\,x-3\,.\,36=0$$

   Comme $\Delta=9-4\,.\,(-3\,.\,36)=9(1+48)=21^2$, les solutions de l'équation sont données par

$$\left(x=\frac{3+21}{2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{3-21}{2}\right) \Leftrightarrow (x=12 \quad \text{ou} \quad x=-9)$$

   Ainsi le prix plein de l'entrée est 12 euros, la valeur négative -9 étant à rejeter.

2. **a) Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite d d'équation cartésienne $3x+2y-5=0$ ainsi que les points A et B de coordonnées respectives $(-1,1)$ et $(3,2)$. Déterminer un vecteur directeur de d et dire, en justifiant, s'il est orthogonal ou non au vecteur $\overrightarrow{AB}$.**
   b) Dans une base orthonormée de l'espace, on considère les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de composantes respectives $(-1,1,0)$ et $(1,-2,2)$. Déterminer $\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}$ ainsi que $\theta\in[0,\pi]$ si θ est la mesure de l'angle entre ces deux vecteurs.

   Solution. a) Tout vecteur directeur de d est un multiple non nul du vecteur de composantes $(2,-3)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(3-(-1),2-1)=(4,1)$. En effectuant le produit scalaire de ces deux vecteurs, on obtient $8-3=5\neq 0$ ce qui prouve que ces vecteurs ne sont pas orthogonaux puisque leur produit scalaire n'est pas nul.

   b) Le produit scalaire $\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}$ vaut $-1+(-2)+0=-3$ et le produit vectoriel est le vecteur $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$ si $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ sont les vecteurs de la base.

   Comme $\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}=||\overrightarrow{a}||\ ||\overrightarrow{b}||\cos(\theta)=-3$, que $||\overrightarrow{a}||=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$ et $||\overrightarrow{b}||=\sqrt{1+4+4}=3$, on a $\cos(\theta)=-1/\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. On en conclut que $\theta=\frac{3\pi}{4}$ puisque $\theta\in[0,\pi]$.

   On pourrait aussi déterminer θ à partir du produit vectoriel puisque $||\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}||=||\overrightarrow{a}||\ ||\overrightarrow{b}||\sin(\theta)$ et que $||\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}||=\sqrt{4+4+1}=3$. On a alors $\sin(\theta)=1/\sqrt{2}$, ce qui donne $\theta=\frac{\pi}{4}$ ou $\theta=\frac{3\pi}{4}$. Comme le produit scalaire est négatif, on sait que θ appartient au second quadrant. Dès lors, $\theta=\frac{3\pi}{4}$.