Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2013-2014

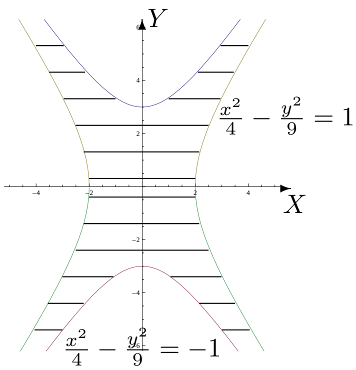
Mathématiques générales B : corrigé du test 1

Version 28 février 2014

Test 1 du 18-02-2014

1. **On donne la fonction f explicitement par $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)$.**
   a) Déterminer ses domaines de définition A et de dérivabilité B.
   b) Représenter A et B dans un repère orthonormé.
   c) Calculer la dérivée partielle de f par rapport à sa seconde variable.

   Solution. a) Le domaine de définition de f est l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$.
   Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} < 1\right\}$.

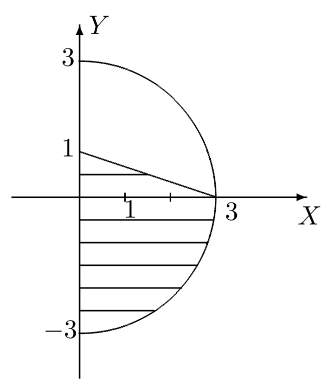


   b) L'ensemble A est l'ensemble des points de la partie hachurée, les points des hyperboles étant compris dans A. L'ensemble B est l'ensemble des points de la partie hachurée, les points des hyperboles étant exclus.
   c) En tout point de B, la dérivée partielle de f par rapport a sa seconde variable est

$$(D_y f)(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-2y}{9}\right)$$

$$= \frac{-8y}{\sqrt{36^2 - (9x^2 - 4y^2)^2}}$$

2. **Décrire analytiquement l'ensemble C hachuré ci-dessous (les points des bords étant compris dans C) de la façon suivante :**
   a) en donner l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, en donner l'ensemble de variation des ordonnées.
   b) faire de même en permutant les termes "abscisses" et "ordonnées".



   Solution. L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 9$ et celle de la droite $x + 3y - 3 = 0$. Dès lors, on a

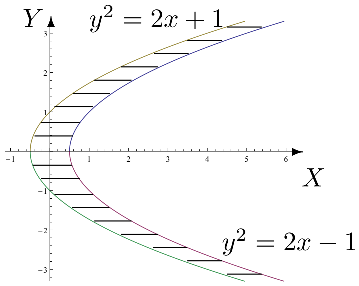
$$\text{a) } C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,3],\ y \in \left[-\sqrt{9-x^2}, 1 - \frac{x}{3}\right]\right\}$$

$$\text{b) } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-3,0],\ x \in [0, \sqrt{9-y^2}]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [0, 3-3y]\}.$$

Test 1 du 20-02-2014

1. **On donne la fonction f explicitement par $f(x,y) = \text{arcos}\left(y^2 - 2x\right)$.**
a) Déterminer ses domaines de définition A et de dérivabilité B.
b) Représenter A et B dans un repère orthonormé.
c) Calculer la dérivée partielle de f par rapport à sa seconde variable.

Solution. a) Le domaine de définition de f est l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y^2 - 2x \leq 1\right\}$.
Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y^2 - 2x < 1\right\}$.

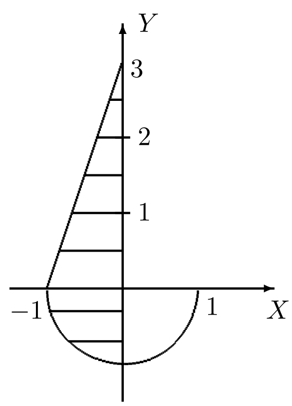


b) L'ensemble A est l'ensemble des points situés entre les 2 paraboles (partie hachurée), ceux des paraboles étant compris dans A.
L'ensemble B est l'ensemble des points situés entre les 2 paraboles, ceux des paraboles étant exclus de B.

c) En tout point de B, la dérivée partielle de f par rapport a sa seconde variable est

$$(D_y f)(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{1-(y^2-2x)^2}} \cdot 2y = \frac{-2y}{\sqrt{1-(y^2-2x)^2}}.$$

2. **Décrire analytiquement l'ensemble C hachuré ci-dessous (les points des bords étant compris dans C) de la façon suivante :**
a) en donner l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, en donner l'ensemble de variation des ordonnées.
b) faire de même en permutant les termes "abscisses" et "ordonnées".



Solution. L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 1$ et celle de la droite $3x - y + 3 = 0$. Dès lors, on a

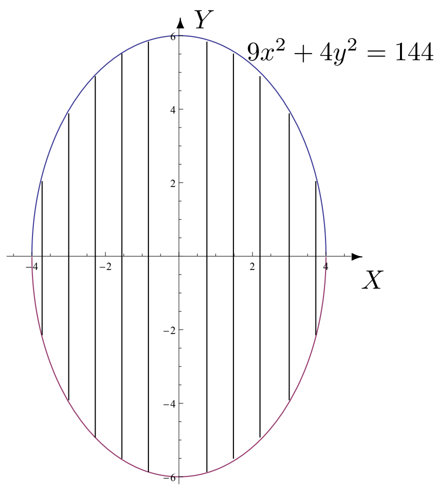
$$\text{a) } C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, 3x+3\right]\right\}$$

$$\text{b) } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0],\ x \in [-\sqrt{1-y^2}, 0]\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,3],\ x \in \left[\frac{y}{3} - 1, 0\right]\right\}.$$

Test 1 du 21-02-2014

1. **On donne la fonction f explicitement par $f(x,y) = \sqrt{144 - 9x^2 - 4y^2}$.**
   a) Déterminer ses domaines de définition A et de dérivabilité B.
   b) Représenter A et B dans un repère orthonormé.
   c) Calculer la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable.

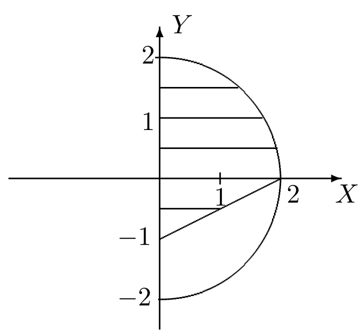
   Solution. a) Le domaine de définition de f est l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 144 - 9x^2 - 4y^2 \geq 0\right\}$. Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 144 - 9x^2 - 4y^2 > 0\right\}$.



   b) L'ensemble A est l'ensemble des points situés à l'intérieur de l'ellipse (partie hachurée), ceux de l'ellipse étant compris dans A.
   L'ensemble B est l'ensemble des points situés à l'intérieur de l'ellipse, ceux de l'ellipse étant exclus de B.
   c) En tout point de B, la dérivée partielle de f par rapport a sa première variable est

$$(D_x f)(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{144 - 9x^2 - 4y^2}} \cdot (-18x)$$
$$= \frac{-9x}{\sqrt{144 - 9x^2 - 4y^2}}$$

2. **Décrire analytiquement l'ensemble C hachuré ci-dessous (les points des bords étant compris dans C) de la façon suivante :**
   a) en donner l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, en donner l'ensemble de variation des ordonnées.
   b) faire de même en permutant les termes "abscisses" et "ordonnées".



   Solution. L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 4$ et celle de la droite $x - 2y - 2 = 0$. Dès lors, on a

$$\text{a) } C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2],\ y \in \left[\frac{x}{2} - 1, \sqrt{4 - x^2}\right]\right\}$$

$$\text{b) } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,0],\ x \in [0, 2y+2]\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2],\ x \in \left[0, \sqrt{4 - y^2}\right]\right\}.$$