1, 2, 3...Sciences

Année académique 2013-2014

Mathématique et physique : 1er bachelier

Test du 16-09-13

Correction

Problèmes élémentaires

Rédiger une solution des problèmes simples suivants.
Mathématique :
1) Une citerne parallélépipédique a une base carrée de 4 m de côté. Lors d'un orage, il est tombé 50 litres par m^2. De combien de cm le niveau de l'eau s'est-il élevé dans la citerne ?

Solution. Puisque 1 litre correspond à un volume de 1 dm^3 = 10^{-3} m^3, s'il tombe 50 litres par m^2, cela correspond à un volume de $50\ .\ 10^{-3}$ m^3 par m^2. Dès lors, le niveau de l'eau dans la citerne s'élève de $5\ .\ 10^{-2}$ m = 5 cm.

2) Si le réel exprimant le périmètre d'un carré évalué en cm est égal au double du réel exprimant sa surface évaluée en m^2, que vaut la longueur d'un de ses côtés (en décimètre) ?

Solution. Soit $x > 0$ la longueur en décimètres d'un côté du carré.
Le périmètre évalué en cm vaut donc $40\,x\ cm$ et la surface évaluée en m^2 vaut $10^{-2}\ x^2\ m^2$.
Puisque le réel exprimant le périmètre en cm est égal au double du réel exprimant sa surface en m^2, on a l'égalité

$$40\,x = 2\ .\ 10^{-2}x^2 \Leftrightarrow (4.10^3 - 2x)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2\ 000.$$

Dès lors, la longueur d'un côté du carré est 2 000 dm.

Physique :
Sur Terre, en négligeant les frottements de l'air, donner une approximation, en nombre entier de secondes, du temps mis par un corps lancé verticalement vers le haut à une vitesse de $30\,\mathrm{m/s}$ pour revenir à son point de départ.

Solution. Si $t \in \mathbb{N}_0$ est le temps, exprimé en secondes, mis par le corps pour parvenir à son point le plus haut, on a $30 = gt$, g étant l'accélération due à la pesanteur à la surface de la Terre.
En prenant g égal à 10 m/s^2, on a alors $t = 3$.
Ainsi, le temps mis par ce corps pour revenir à son point de départ vaut approximativement $3\ .\ 2 = 6$ secondes.

Transcodage

1. **Exprimer en français la propriété ci-dessous (ATTENTION : ne pas se limiter à une lecture de symboles. Par exemple, on exprime ≪ $a + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ ≫ par ≪ la somme de deux réels ≫ et non ≪ a plus b avec a, b appartenant à $\mathbb{R}$ ≫) :**

   $$|x| = \left\{ \begin{array}{rcl} x & \text{si} & x \geq 0 \\ -x & \text{si} & x \leq 0 \end{array} \right. , x \in \mathbb{R} \qquad (\text{ on désigne par } |x| \ll \text{la valeur absolue de } x \gg)$$

   Solution. La valeur absolue d'un réel est ce réel s'il est positif et son opposé s'il est négatif.

2. **Exprimer en symboles mathématiques la phrase entre guillemets :**
   ≪ Si une onde se propage sur une corde tendue, sa vitesse de propagation est égale à la racine carrée du quotient de la tension de la corde par sa masse par unité de longueur. ≫.

   Solution. Si v est la vitesse de propagation d'une onde dans une corde tendue, T la tension de cette corde et m sa masse par unité de longueur, alors on a

   $$v = \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Techniques de calcul

1. **Résoudre (x est une inconnue réelle)**

$$\text{(a) } \frac{x}{14}+\frac{2}{21}=\frac{3x}{2} \qquad \text{(b) } x^2-4=2x \qquad \text{(c) } x-2\geq\frac{4}{x-2}$$

Solution.

1. (a) On a

$$\frac{x}{14}+\frac{2}{21}=\frac{3x}{2} \Leftrightarrow \frac{3x+4}{42}=\frac{63x}{42} \Leftrightarrow 60x=4.$$

Dès lors, en divisant les deux membres par 60 et en simplifiant la fraction, on obtient $x=\frac{1}{15}$ et l'ensemble des solutions est l'ensemble $S=\left\{\frac{1}{15}\right\}$.

(b) L'équation donnée est équivalente à $x^2-2x-4=0$. Comme son discriminant $\Delta=(-2)^2-4.1.(-4)=20$, les solutions sont $\dfrac{2-2\sqrt{5}}{2}=1-\sqrt{5}$ et $\dfrac{2+2\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S=\left\{1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}\right\}$.

(c) Si $x\neq 2$, l'inéquation donnée est équivalente à $\dfrac{(x-2)^2-4}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-4)}{x-2}\geq 0$. En étudiant le signe du premier membre, on a $x\in[0,2[$ ou $x\in[4,+\infty[$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S=[0,2[\cup[4,+\infty[$.

2. **Résoudre (x est une inconnue réelle)** $\quad \sin(3x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad$ **et donner les solutions qui appartiennent à $[\pi,2\pi]$.**

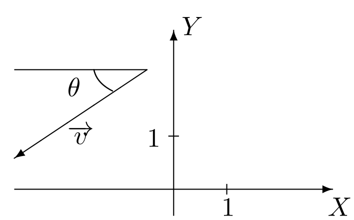
Solution. L'équation donnée est équivalente à $\sin(3x)=\sin\frac{\pi}{3}$ qui a pour solutions

$$\left(3x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } 3x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left(x=\frac{\pi}{9}+2\,k\frac{\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{2\pi}{9}+2\,k\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right).$$

L'ensemble des solutions dans $[\pi,2\pi]$ est alors $S=\left\{\dfrac{13\pi}{9},\ \dfrac{14\pi}{9}\right\}$.

Représentation graphique

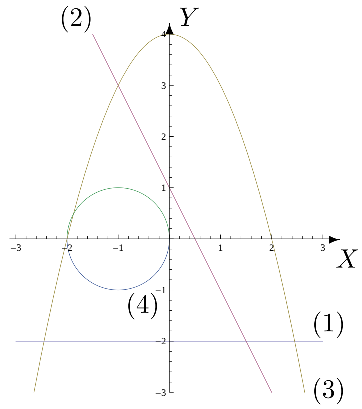
1. **Dans un repère orthonormé du plan, on donne le vecteur libre $\vec{v}$ par la représentation ci-contre. On suppose que la mesure de l'angle entre ce vecteur et le vecteur de base de l'axe X est $\theta\in[0,\pi]$ et que la longueur du vecteur (c'est-à-dire sa norme) est égale à $r>0$. Dans ce cas, en utilisant les données et les notations de l'énoncé, que vaut la première composante du vecteur $\vec{v}$?**



Solution. Avec les notations de l'énoncé, la première composante du vecteur $\vec{v}$ est $-r\cos(\theta)$.

2. **Dans un même repère orthonormé, représenter avec précision les courbes dont voici des équations cartésiennes. Accompagner le graphique du numéro de l'équation.**

(1) $y + 2 = 0$
(2) $2x + y - 1 = 0$
(3) $x^2 + y - 4 = 0$
(4) $x^2 + y^2 + 2x = 0$



QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et l'encadrer ou la surligner.

1. Si on multiplie par deux la longueur du rayon d'un cercle, alors
   (a) le volume du cylindre dont les bases sont composées de ce disque et dont la hauteur n'est pas modifiée est multiplié par 2
   (b) l'aire de ce disque est multipliée par 2
   (c) ♣ le périmètre de ce cercle est multiplié par 2
   (d) il est nécessaire de connaître la taille initiale du rayon du cercle pour pouvoir répondre à cette question
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
2. On achète un article dont le prix a augmenté de 25 %. Pour connaître le prix de départ, le prix après augmentation doit donc être
   (a) multiplié par 0,25 (b) multiplié par 0,75
   (c) divisé par 0,25 (d) divisé par 0,75
   (e) ♣ aucune des propositions précédentes n'est correcte
3. Deux cinquièmes du volume d'un récipient est rempli d'eau. On ajoute alors une quantité d'eau égale aux trois quarts du volume libre restant. Au total, quelle est la part du volume du récipient remplie d'eau ?
   (a) 18/25 (b) ♣ 17/20 (c) 21/25 (d) 18/20
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
4. Si ν est la fréquence du mouvement d'un corps de masse m situé à l'extrémité d'un ressort de raideur r, alors on a
   $$\nu = K\sqrt{\frac{r}{m}},\ K \text{ étant une constante strictement positive.}$$
   Si on veut doubler la fréquence du mouvement, comment doit-on modifier la masse du corps en laissant la raideur du ressort inchangée ?
   (a) Elle doit être divisée par $\sqrt{2}$ (b) Elle doit être multipliée par $\sqrt{2}$
   (c) Elle doit être divisée par 2 (d) Elle doit être multipliée par 4
   (e) ♣ Elle doit être divisée par 4
5. Le graphique ci-dessous représente la vitesse v en fonction du temps t d'un mobile qui se déplace de manière rectiligne. Si b et c sont deux constantes réelles strictement positives, laquelle des expressions données décrit le mieux l'accélération a du mobile ?
   (a) $a(t) = 0$
   (b) $a(t) = -b$
   (c) $a(t) = b$
   (d) ♣ $a(t) = bt + c$
   (e) $a(t) = -bt + c$