Université de Liège

1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2013-2014

Mathématiques générales A : corrigé du test 2

Version 24 octobre 2013

Corrigé du test 2 du 28-10-2013

1. **Un cycliste effectue un aller - retour entre 2 villes. A l'aller, sa vitesse constante est 28 km/h. Au retour, sa vitesse est encore constante et vaut 21 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'aller - retour ?**

   Solution.
   Données :
   1) vitesse constante à l'aller $v_A = 28$ km/h
   2) vitesse constante au retour $v_R = 21$ km/h
   Inconnue : vitesse moyenne v_M sur l'aller - retour en km/h

   Si d est la distance en km entre les deux villes, t_A le temps en h mis par le cycliste à l'aller et t_R le temps en h mis par le cycliste au retour, on a les relations $d = 28\ t_A = 21\ t_R$ et $2d = v_M(t_A + t_R)$.

   Dès lors, $t_A = \frac{21}{28} t_R = \frac{3}{4} t_R$ et $2d = 42 t_R = v_M(\frac{3}{4} t_R + t_R)$. En divisant les 2 membres de l'égalité par $t_R \neq 0$, on a
   $$42 = \frac{7}{4}\ v_M \Leftrightarrow v_M = 24.$$
   Ainsi, la vitesse moyenne du cycliste sur l'aller - retour est de 24 km/h.

2. **Soit $f : x \mapsto f(x) = \arcsin(\sqrt{x^2 - 1})$.**
   a) Déterminer le domaine de définition de f.
   b) De quelles fonctions élémentaires f est-il la composée ? Représenter graphiquement la composition à partir de ces fonctions.
   c) Cette fonction est-elle paire ou impaire ? Justifier.

   Solution. a) Le domaine de définition de f est $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0,\ -1 \leq \sqrt{x^2 - 1} \leq 1\}$.
   La première condition est équivalente à $x \leq -1$ ou $x \geq 1$. L'inégalité $-1 \leq \sqrt{x^2 - 1}$ est toujours vérifiée et $\sqrt{x^2 - 1} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.
   Dès lors, $\mathrm{dom}(f) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$.

   b) Voici les fonctions élémentaires qui, composées, donnent la fonction f :
   $g : x \mapsto x^2 - 1$, $h : y \mapsto \sqrt{y}$ et $i : z \mapsto \arcsin(z)$.
   La composition se représente de la façon suivante :

   $$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & x^2 - 1 = y \arrow[r, bend left, "h"] & \sqrt{y} = z \arrow[r, bend left, "i"] & \arcsin(z) = \arcsin(\sqrt{x^2 - 1}) \end{tikzcd}$$

   c) On constate que si $x \in \mathrm{dom}(f)$ alors $-x \in \mathrm{dom}(f)$.
   De plus, $f(-x) = \arcsin(\sqrt{(-x)^2 - 1}) = \arcsin(\sqrt{x^2 - 1}) = f(x)$.
   Dès lors, on peut conclure que la fonction f est paire.

Corrigé du test 2 du 30-10-2013

1. **Un cycliste effectue un aller - retour entre 2 villes. A l'aller, sa vitesse constante est 33 km/h. Au retour, sa vitesse est encore constante. Que vaut-elle si la vitesse moyenne du cycliste sur l'aller - retour vaut 25 km/h ?**

   Solution.
   Données :
   1) vitesse constante à l'aller $v_A = 33$ km/h
   2) vitesse moyenne sur l'aller - retour $v_M = 25$ km/h
   Inconnue : vitesse constante au retour v_R en km/h

   Si d est la distance en km entre les deux villes, t_A le temps en h mis par le cycliste à l'aller et t_T le temps en h mis par le cycliste pour l'aller - retour, on a les relations $d = 33\ t_A = v_R\ (t_T - t_A)$ et $2d = 25t_T$.

   Dès lors, $2d = 25t_T = 66t_A \Leftrightarrow t_T = \frac{66}{25}t_A$ et $33t_A = v_R(\frac{66}{25}t_A - t_A)$. En divisant les 2 membres de l'égalité par $t_A \neq 0$, on a
   $$33 = \frac{41}{25}\ v_R \Leftrightarrow v_R = \frac{825}{41}.$$
   Ainsi, la vitesse constante du cycliste au retour est de $\frac{825}{41}$ km/h (c'est-à-dire approximativement 20 km/h).

2. **Soit $f : x \mapsto f(x) = \arcsin(\ln(|x|))$.**
   a) Déterminer le domaine de définition de f.
   b) De quelles fonctions élémentaires f est-il la composée ? Représenter graphiquement la composition à partir de ces fonctions.
   c) Cette fonction est-elle paire ou impaire ? Justifier.

   Solution. a) Le domaine de définition de f est $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 0,\ -1 \leq \ln(|x|) \leq 1\}$.
   La première condition est équivalente à $x \neq 0$.
   La deuxième condition est équivalente à
   $$\frac{1}{e} \leq |x| \leq e \Leftrightarrow \left(x \leq -\frac{1}{e} \text{ ou } x \geq \frac{1}{e}\right) \text{ et } -e \leq x \leq e$$
   Dès lors, $\mathrm{dom}(f) = [-e, -\frac{1}{e}] \cup [\frac{1}{e}, e]$.

   b) Voici les fonctions élémentaires qui, composées, donnent la fonction f :
   $g : x \mapsto |x|$, $h : y \mapsto \ln(y)$ et $i : z \mapsto \arcsin(z)$.
   La composition se représente de la façon suivante :
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & {|x| = y} \arrow[r, "h"] & {\ln(y) = z} \arrow[r, "i"] & {\arcsin(z) = \arcsin(\ln(|x|))} \end{tikzcd}$$

   c) On constate que si $x \in \mathrm{dom}(f)$ alors $-x \in \mathrm{dom}(f)$.
   De plus, $f(-x) = \arcsin(\ln(|-x|)) = \arcsin(\ln(|x|)) = f(x)$.
   Dès lors, on peut conclure que la fonction f est paire.