Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2013-2014

Mathématiques générales B : corrigé du test 2

Version 6 mars 2014

Test 2 du 14-03-2014

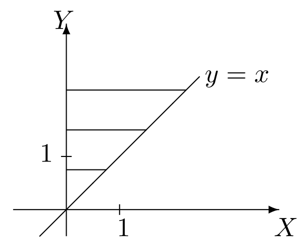
1. **Soit**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\ dy \right)\ dx.$$

a) Dans un repère orthonormé, représenter, en le hachurant, l'ensemble d'intégration A.
b) Permuter l'ordre d'intégration.
c) L'intégrale obtenue après permutation a-t-elle la même valeur que l'intégrale donnée ? Justifier.

NB : on admettra que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^p} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} (x^p \exp(x)) = 0$, ce qu'on exprime par "à l'infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de x".

Solution. a) L'ensemble d'intégration est $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, +\infty[,\ y \in [x, +\infty[\}$ et voici sa représentation graphique



b) Comme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0, +\infty[,\ x \in [0, y]\}$, en permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y} \frac{e^{-y}}{y}\ dx \right)\ dy.$$

c) Etudions l'intégrabilité de $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{-y}}{y}$ sur A. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$ donc sur A non borné fermé et on a $|f(x, y)| = f(x, y)\ \forall (x, y) \in A$.

Si y est fixé dans $]0, +\infty[$, la fonction $g : x \mapsto \frac{e^{-y}}{y}$ est continue sur le borné fermé $[0, y]$ donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{y} \frac{e^{-y}}{y}\ dx = y\ .\ \frac{e^{-y}}{y} = e^{-y}.$$

Etudions alors l'intégrabilité de $h : y \mapsto e^{-y}$, fonction continue sur $\mathbb{R}$, en utilisant le critère en θ. Soit $\theta = 2 > 1$; on a

$$\lim_{y \to +\infty} (y^2 e^{-y}) = \lim_{z \to -\infty} (z^2 e^{z}) = 0.$$

Comme la limite existe et est finie avec $\theta > 1$, la fonction h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0, +\infty[$ et, dès lors, f est intégrable sur A. Ainsi, puisque f est intégrable sur A, on peut conclure que $I = I'$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale**

$$I = \iint_A \sin(x^2 + y^2)\ dx\, dy$$

si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$**.**

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble borné fermé ; elle est donc intégrable sur A. En passant aux coordonnées polaires ($x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ où $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$), on a

$$I = \int_1^{4} \left(\int_0^{2\pi} r\ \sin(r^2)\ d\theta \right) dr$$

vu la bijection entre A et $A' = [1, 4] \times [0, 2\pi[$, le jacobien valant r.

Dès lors,

$$I = 2\pi \int_1^4 r \ \sin(r^2)\, dr = \pi \left[-\cos(r^2)\right]_1^4 = \pi(\cos(1) - \cos(16)).$$

Test 2 du 17-03-2014

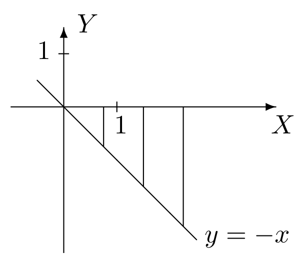
1. **Soit**

$$I = \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{-y}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \ dx \right) \ dy.$$

a) Dans un repère orthonormé, représenter, en le hachurant, l'ensemble d'intégration A**.**
b) Permuter l'ordre d'intégration.
c) L'intégrale obtenue après permutation a-t-elle la même valeur que l'intégrale donnée ? Justifier.

NB : on admettra que $\forall p \in \mathbb{N}, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^p} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^p \exp(x)) = 0$, ce qu'on exprime par "à l'infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de x".

Solution. a) L'ensemble d'intégration est $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]-\infty, 0[, \ x \in [-y, +\infty[\}$ et voici sa représentation graphique



b) Comme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, +\infty[, \ y \in [-x, 0]\}$, en permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I' = \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{-x}^{0} \frac{e^{-x}}{x} \ dy \right) \ dx.$$

c) Etudions l'intégrabilité de $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ sur A. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$ donc sur A non borné fermé et on a $|f(x, y)| = f(x, y) \ \forall (x, y) \in A$.

Si x est fixé dans $]0, +\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ est continue sur le borné fermé $[-x, 0]$ donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_{-x}^{0} \frac{e^{-x}}{x} \ dy = x \ . \ \frac{e^{-x}}{x} = e^{-x}.$$

Etudions alors l'intégrabilité de $h : x \mapsto e^{-x}$, fonction continue sur $\mathbb{R}$, en utilisant le critère en θ. Soit $\theta = 2 > 1$; on a

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 e^{-x}) = \lim_{z \to -\infty} (z^2 e^z) = 0.$$

Comme la limite existe et est finie avec $\theta > 1$, la fonction h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0, +\infty[$ et, dès lors, f est intégrable sur A. Ainsi, puisque f est intégrable sur A, on peut conclure que $I = I'$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale**

$$I = \iint_A e^{x^2+y^2}\ dx\, dy$$

si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0\}$**.**

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble borné fermé ; elle est donc intégrable sur A. En passant aux coordonnées polaires $(x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ où $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[)$, on a

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\ e^{r^2}\ d\theta \right) dr$$

vu la bijection entre $A \setminus \{(0,0)\}$ et $A' =]0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, le jacobien valant r.

Dès lors,

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r\ e^{r^2}\ dr = \frac{\pi}{4} \left[e^{r^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}(e-1).$$

Test 2 du 21-03-2014

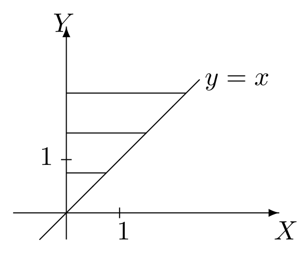
1. **Soit**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-y^2}\ dy \right)\ dx.$$

a) Dans un repère orthonormé, représenter, en le hachurant, l'ensemble d'intégration A**.**
b) Permuter l'ordre d'intégration.
c) L'intégrale obtenue après permutation a-t-elle la même valeur que l'intégrale donnée ? Justifier.

NB : on admettra que $\forall p \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^p} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^p \exp(x)) = 0$, ce qu'on exprime par "à l'infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de x".

Solution. a) L'ensemble d'intégration est $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ [0, +\infty[,\ \ y \in [x, +\infty[\}$ et voici sa représentation graphique



b) Comme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in\ [0, +\infty[,\ \ x \in [0, y]\}$, en permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y e^{-y^2}\ dx \right)\ dy.$$

c) Etudions l'intégrabilité de $f : (x, y) \mapsto e^{-y^2}$ sur A. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A non borné fermé et on a $|f(x, y)| = f(x, y)\ \forall (x, y) \in A$.

Si y est fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $g : x \mapsto e^{-y^2}$ est continue sur le borné fermé $[0,y]$ donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^y e^{-y^2}\ dx = y\ e^{-y^2}.$$

Etudions alors l'intégrabilité de $h : y \mapsto y\ e^{-y^2}$, fonction continue sur $\mathbb{R}$, en utilisant le critère en θ. Soit $\theta = 2 > 1$; on a

$$\lim_{y\to+\infty}(y^3 e^{-y}) = \lim_{z\to-\infty}(-z^3 e^z) = 0.$$

Comme la limite existe et est finie avec $\theta > 1$, la fonction h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et, dès lors, f est intégrable sur A. Ainsi, puisque f est intégrable sur A, on peut conclure que $I = I'$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale**

$$I = \iint_A \cos(3x^2+3y^2)\ dx\, dy$$

si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$**.**

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = \cos(3x^2+3y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble borné fermé ; elle est donc intégrable sur A. En passant aux coordonnées polaires ($x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ où $r > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$), on a

$$I = \int_1^2 \left(\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r\ \cos(3r^2)\ d\theta \right) dr$$

vu la bijection entre A et $A' = [1,2] \times [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, le jacobien valant r.

Dès lors,

$$I = \frac{\pi}{2}\int_1^2 r\ \cos(3r^2)\, dr = \frac{\pi}{12}\left[\sin(3r^2)\right]_1^2 = \frac{\pi}{12}(\sin(12) - \sin(3)).$$