Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2013-2014

Mathématiques générales A : corrigé du test 3

Version 20 novembre 2013

Corrigé du test 3 du 18-11-2013

1. **(a) Quand dit-on qu'une fonction est dérivable en un point de son domaine de définition ?**
   (b) Que vaut alors sa dérivée en ce point ?

   Solution. : Voir cours

2. **Soit** $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$**.**
   Si c'est possible et sans utiliser le théorème de l'Hospital, calculer

$$(a) \lim_{x\to 1^+} f(x) \qquad\qquad (b) \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Solution. On a $\operatorname{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2-1 \geq 0,\ x-1 \neq 0\} =]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$.
Tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre $\operatorname{dom}(f) \cap]1,+\infty[$; de plus, $\operatorname{dom}(f)$ n'est pas minoré. Les deux limites sont donc envisageables.

(a) Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, comme $x-1 = |x-1| = \sqrt{(x-1)^2}$ si $x \geq 1$, on a

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty.$$

Autre méthode : on peut aussi lever l'indétermination en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{x^2-1}$, puis en factorisant x^2-1 et enfin en simplifiant la fraction par $x-1$. Cela donne

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty.$$

(b) Pour lever l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$, en mettant x^2 en évidence sous la racine, on a

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

Corrigé du test 3 du 20-11-2013

1. **(a) A quelle(s) condition(s) une fonction composée est-elle dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$?**
   (b) Que vaut alors sa dérivée sur cet intervalle ?

   Solution. : Voir cours

2. **(a) Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{-1-2x} - \sqrt{1-2x}$. Si c'est possible et sans utiliser le théorème de l'Hospital, calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$**

   (b) Soit $g : x \mapsto g(x) = \dfrac{x}{|\sin(x)|}$. Si c'est possible et sans utiliser le théorème de l'Hospital, calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

   Solution. (a) On a $\operatorname{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : -1-2x \geq 0,\ 1-2x \geq 0\} =]-\infty, -1/2]$, ensemble non minoré. La limite en $-\infty$ est donc envisageable.

   Pour lever l'indétermination $\infty - \infty$, on multiplie numérateur et dénominateur par le binôme conjugué et on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{-1-2x} - \sqrt{1-2x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{-1-2x} - \sqrt{1-2x})(\sqrt{-1-2x} + \sqrt{1-2x})}{\sqrt{-1-2x} + \sqrt{1-2x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1-2x-1+2x}{\sqrt{-1-2x} + \sqrt{1-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{\sqrt{-1-2x} + \sqrt{1-2x}} = 0$$

   (b) On a $\operatorname{dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, ensemble non majoré. La limite en $+\infty$ est donc envisageable.

   Comme $|\sin(x)| \leq 1$, on a $\dfrac{1}{|\sin(x)|} \geq 1$ et $\forall x \in \operatorname{dom}(g) \cap]0, +\infty[$, $\dfrac{x}{|\sin(x)|} \geq x$.
   Dès lors, vu que $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, par application du théorème de l'étau, on a

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|\sin(x)|} = +\infty.$$

Corrigé du test 3 du 22-11-2013

1. **Enoncer les théorèmes de dérivation**
   (a) d'un produit de 2 fonctions
   (b) d'un quotient de 2 fonctions.

   Solution. : Voir cours

2. **Soit** $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{2x+1}$**.**
   Si c'est possible et sans utiliser le théorème de l'Hospital, calculer

$$(a) \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} f(x) \qquad\qquad (b) \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Solution. On a $\operatorname{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 1 \geq 0,\ 2x+1 \neq 0\} =]-\infty, -1/2[\ \cup [1/2, +\infty[$. Tout intervalle ouvert comprenant $-1/2$ rencontre $\operatorname{dom}(f) \cap\ ]-\infty, -1/2[$; de plus, $\operatorname{dom}(f)$ n'est pas minoré. Les deux limites sont donc envisageables.

(a) Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, comme $2x+1 = -|2x+1| = -\sqrt{(2x+1)^2}$ si $x \leq -1/2$, on a

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{2x+1} = -\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \sqrt{\frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)^2}} = -\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} = -\infty.$$

Autre méthode : on peut aussi lever l'indétermination en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{4x^2-1}$, puis en factorisant $4x^2-1$ et enfin en simplifiant la fraction par $2x+1$. Cela donne

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{\sqrt{4x^2-1}\sqrt{4x^2-1}}{(2x+1)\sqrt{4x^2-1}} = \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)\sqrt{4x^2-1}} = \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-1}}$$

$$= -\infty.$$

(b) Pour lever l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$, en mettant $4x^2$ en évidence sous la racine, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|2x|\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}}{2x(1+\frac{1}{2x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{2x} = -1$$