Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2013-2014

Mathématiques générales A : corrigé du test 4

Version 6 décembre 2013

Corrigé du test 4 du 02-12-2013

1. **Si c'est possible, calculer la limite suivante en justifiant**

$$\lim_{x\to 5^-} [(x-5)\ln(5-x)].$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto (x-5)\ln(5-x)$ est définie sur $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 5-x > 0\} =]-\infty, 5[$. La limite en 5^- est envisageable car tout intervalle ouvert comprenant 5 rencontre $\mathrm{dom}(f) \cap]-\infty, 5[=]-\infty, 5[$.

Comme $\lim\limits_{x\to 5^-}(x-5) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 5^-}\ln(5-x) = -\infty$ par application du théorème de la limite d'une fonction composée ($\lim\limits_{x\to 5^-}(5-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{y\to 0^+}\ln(y) = -\infty$), pour lever l'indétermination $0 \,.\, \infty$ on utilise le théorème de l'Hospital en écrivant f sous la forme $x \mapsto \dfrac{\ln(5-x)}{(x-5)^{-1}}$.
Considérons $V =]5-\varepsilon, 5[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit ainsi que les fonctions $g : x \mapsto \ln(5-x)$ et $h : x \mapsto (x-5)^{-1}$ et vérifions les hypothèses du théorème. On a
1) g dérivable dans $]-\infty, 5[$ et h dérivable dans $\mathbb{R} \setminus \{5\}$; g et h sont donc dérivables dans V
2) $Dh(x) = -(x-5)^{-2} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ donc non nul dans V
3) $\lim\limits_{x\to 5^-}(x-5)^{-1} = -\infty$
4) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{-(5-x)^{-1}}{-(x-5)^{-2}} = \lim\limits_{x\to 5^-}(5-x) = 0^+$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 0.

2. **Primitiver la fonction donnée explicitement par $x \mapsto x\cos(4-x^2)$ en spécifiant l'intervalle dans lequel vous travaillez.**

Solution. La fonction donnée est continue sur $\mathbb{R}$ donc primitivable sur cet ensemble. Comme $x \mapsto \cos(4-x^2)$ est une fonction composée et que $D(4-x^2) = -2x$, par une primitivation par substitution, on a successivement

$$\begin{aligned}\int x\cos(4-x^2)\ dx &= -\frac{1}{2}\int -2x\cos(4-x^2)\ dx \\ &\simeq -\frac{1}{2}\left(\int \cos(t)\ dt\right)_{t=4-x^2} \simeq -\frac{1}{2}\sin(4-x^2),\ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Corrigé du test 4 du 05-12-2013

1. **Si c'est possible, calculer la limite suivante en justifiant**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{\ln(x)}.$$

Solution. : La fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+3}}{\ln(x)}$ est définie sur $\mathrm{dom}(f) =]0,+\infty[\setminus\{1\}$, ensemble non majoré. La limite en $+\infty$ est donc envisageable.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, pour lever l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$ on utilise le théorème de l'Hospital. Remarquons que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)}$$

pour autant que l'une de ces limites existe.
Considérons $V =]N,+\infty[$ avec $N > 0$ assez grand ainsi que les fonctions $g : x \mapsto x$ et $h : x \mapsto \ln(x)$ et vérifions les hypothèses du théorème. On a
1) g dérivable dans $\mathbb{R}$ et h dérivable dans $]0,+\infty[$; g et h sont donc dérivables dans V
2) $Dh(x) = x^{-1} \neq 0 \ \forall x \in]0,+\infty[$ donc non nul dans V
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut $+\infty$.

2. **Primitiver la fonction donnée explicitement par $x \mapsto x\exp(-x^2)$ en spécifiant l'intervalle dans lequel vous travaillez.**

Solution. La fonction donnée est continue sur $\mathbb{R}$ donc primitivable sur cet ensemble. Comme $x \mapsto \exp(-x^2)$ est une fonction composée et que $D(-x^2) = -2x$, par une primitivation par substitution, on a successivement

$$\begin{aligned}\int x\exp(-x^2)\ dx &= -\frac{1}{2}\int -2x\exp(-x^2)\ dx \\ &\simeq -\frac{1}{2}\left(\int \exp(t)\ dt\right)_{t=-x^2} \simeq -\frac{1}{2}\exp(-x^2),\ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Corrigé du test 4 du 06-12-2013

1. **Si c'est possible, calculer la limite suivante en justifiant**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}{4-x^2}.$$

Solution. : La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}{4-x^2}$ est définie sur $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0,\ 4-x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, ensemble non minoré. La limite en $-\infty$ est donc envisageable.

Comme $\ln\left(\dfrac{1}{|x|}\right) = \ln(|x|^{-1}) = -\ln(-x)\ \forall x < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(4-x^2) = -\infty$; pour lever l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$ on utilise le théorème de l'Hospital.

Considérons $V =]-\infty, -N[$ avec $N > 0$ assez grand ainsi que les fonctions $g : x \mapsto -\ln(-x)$ et $h : x \mapsto 4 - x^2$ et vérifions les hypothèses du théorème. On a
1) g dérivable dans $]-\infty, 0[$ et h dérivable dans $\mathbb{R}$; g et h sont donc dérivables dans V
2) $Dh(x) = -2x \neq 0\ \forall x \in V$
3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(4-x^2) = -\infty$
4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^{-1}}{-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x^2} = 0^+$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 0.

2. **Primitiver la fonction donnée explicitement par $x \mapsto x\sin(x^2+1)$ en spécifiant l'intervalle dans lequel vous travaillez.**

Solution. La fonction donnée est continue sur $\mathbb{R}$ donc primitivable sur cet ensemble. Comme $x \mapsto \sin(x^2+1)$ est une fonction composée et que $D(x^2+1) = 2x$, par une primitivation par substitution, on a successivement

$$\int x\sin(x^2+1)\ dx = \frac{1}{2}\int 2x\sin(x^2+1)\ dx$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(\int \sin(t)\ dt\right)_{t=x^2+1} \simeq -\frac{1}{2}\cos(x^2+1),\ x \in \mathbb{R}.$$