Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2013-2014

Corrigé de l'examen de math A du 22 mai 2014

Version 22 mai 2014

Question 1.
Définir une fonction concave sur $[0,\pi]$ en considérant la fonction sinus et en donner une interprétation graphique.

Solution. Voir cours.

Question 2.
Enoncer et démontrer le théorème relatif à la dérivation du produit de deux fonctions dérivables dans le même intervalle.
Solution. Voir cours.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi/2]$, résoudre l'équation suivante**

$$\cos(3x) + \sin(3x) = \frac{1}{\cos(3x)}.$$

Solution. L'équation est définie si $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$ et est équivalente à

$$\cos^2(3x) + \sin(3x)\cos(3x) = 1 \Leftrightarrow 1 - \sin^2(3x) + \sin(3x)\cos(3x) = 1 \Leftrightarrow \sin(3x)(-\sin(3x) + \cos(3x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x) = 0 \ \text{ ou } \ \cos(3x) = \sin(3x) \Leftrightarrow 3x = k\pi \ \text{ ou } \ 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi/3 \ \text{ ou } \ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 3\pi/2]$ sont $\pi,\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{13\pi}{12}$ et $\dfrac{17\pi}{12}$.

(b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$(i)\ \exp\left(\ln(9) - \ln(\sqrt{3})\right), \qquad (ii)\ (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^2,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comme $\text{dom}(\ln) =]0, +\infty[$ et $\text{dom}(\exp) = \mathbb{R}$, l'expression $\exp\left(\ln(9) - \ln(\sqrt{3})\right)$ est définie. De plus, en appliquant les propriétés $\forall x, y > 0 : \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\forall x > 0 : \exp(\ln(x)) = x$, on obtient

$$\exp\left(\ln(9) - \ln(\sqrt{3})\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{9}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$

Enfin, comme $i^2 = -1$, on a

$$(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^2 = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + 2i\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha).$$

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(a)\ \lim_{x \to -\infty}(x + \sqrt{x^2 - x}), \qquad (b)\ \lim_{x \to 0}\frac{\exp(4x) - 1}{\sin(x)}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2 - x}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Pour lever l'indétermination $-\infty + \infty$, on multiplie numérateur et dénominateur par le binôme conjugé de $x + \sqrt{x^2 - x}$ et on a

$$\lim_{x \to -\infty}(x + \sqrt{x^2 - x}) = \lim_{x \to -\infty}\frac{(x + \sqrt{x^2 - x})(x - \sqrt{x^2 - x})}{(x - \sqrt{x^2 - x})} = \lim_{x \to -\infty}\frac{x}{(x - |x|)} = \frac{1}{2}$$

car

$$\lim_{x \to -\infty}\sqrt{x^2 - x} = \lim_{x \to -\infty}\sqrt{x^2} = \lim_{x \to -\infty}|x| = \lim_{x \to -\infty}(-x).$$

La fonction $x \mapsto \frac{\exp(4x)-1}{\sin(x)}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre A, le calcul de la limite en 0 peut être envisagé.
Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, appliquons le théorème de l'Hospital. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, considérons $f_1 : x \mapsto \exp(4x) - 1$ et $f_2 : x \mapsto \sin(x)$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables dans V
2) La dérivée de f_2 est non nulle dans V
3) On a $\lim_{x\to 0}(\exp(4x) - 1) = \lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$
4) De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4\exp(4x)}{\cos(x)} = 4.$
Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 4.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(2x-1)}\ dx, \qquad\qquad (b) \int_0^{\sqrt{\pi}/2} x\ \sin(x^2)\ dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(2x-1)}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \setminus \{1/2\}$ donc sur $[1, +\infty[$, ensemble non borné. De plus, elle est positive sur cet ensemble. Pour tout $t > 1$, cette fonction est donc intégrable sur $[1, t]$. En décomposant la fraction en une somme de fractions simples, on a

$$\frac{1}{x(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1) + Bx}{x(2x-1)},\ x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{1/2\}$$

et, par application des propriétés des polynômes, on a $1 = A(2x-1) + Bx,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Dès lors, $A = -1$ et $B = 2$.

Ainsi,

$$\int_1^t \frac{1}{x(2x-1)}\ dx = \int_1^t \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{2x-1}\right) dx = \Big[\ln(2x-1) - \ln(x)\Big]_1^t = \left[\ln\frac{2x-1}{x}\right]_1^t = \ln\frac{2t-1}{t}$$

puisque $\ln(1) = 0$. Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x(2x-1)}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \ln\frac{2t-1}{t} = \ln(2)$$

par application du théorème de la limite d'une fonction composée.
La limite précédente étant finie, f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et son intégrale vaut $\ln(2)$.

La fonction $x \mapsto x\sin(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \sqrt{\pi}/2]$ donc intégrable sur cet ensemble. Dès lors , on a

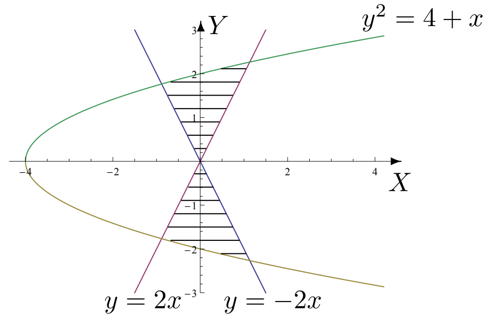
$$\int_0^{\sqrt{\pi}/2} x\ \sin(x^2)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}/2} 2x\ \sin(x^2)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos(x^2)\Big]_0^{\sqrt{\pi}/2} = \frac{1}{2}(-\cos(\pi/4) + \cos(0)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 4x^2 \le y^2 \le 4 + x\right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) + 4f(x) = \sin(4x)$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + 4f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 4$ et ses zéros sont $-2i$ et $2i$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 e^{-2ix} + c_2 e^{2ix} = c_1' \cos(2x) + c_2' \sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2, c_1', c_2' sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme les coefficients de l'équation sont réels et que $\sin(4x) = \Im e^{4ix}$, cherchons une solution particulière F_P de $D^2 f(x) + 4f(x) = e^{4ix} (*)$, une solution particulière de l'équation donnée sera alors $f_P = \Im F_P$.
La fonction $G : x \mapsto e^{4ix}$ est le produit d'un polynôme de degré 0 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 4i$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $F_P(x) = A\, e^{4ix},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. On a successivement

$$DF_P(x) = 4Ai\, e^{4ix} \text{ et } D^2 F_P(x) = -16A\, e^{4ix}$$

et en remplaçant dans l'équation $(*)$, on a

$$-16A + 4A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{-1}{12}.$$

Dès lors, $F_P(x) = -\frac{1}{12} e^{4ix} = -\frac{1}{12}(\cos(4x) + i \sin(4x))$ et $f_P(x) = \Im F_P(x) = -\frac{1}{12} \sin(4x),\ x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 e^{-2ix} + c_2 e^{2ix} - \frac{1}{12} \sin(4x) = c_1' \cos(2x) + c_2' \sin(2x) - \frac{1}{12} \sin(4x),\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2, c_1', c_2' sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
On cueille 49 kg de fleurs qu'on peut vendre immédiatement à 2,70 EUR le kg. On peut aussi les faire sécher ; le séchage leur fait perdre 3/7 de leur poids mais alors les fleurs peuvent être vendues 2,40 EUR de plus le kg. Faut-il vendre toutes les fleurs fraîches ou plutôt attendre qu'elles soient toutes séchées pour les vendre si on veut un prix de vente maximum ?

Solution. Si on vend les fleurs immédiatement, le prix de vente vaut : $2,70 \times 49 = 132,30$ EUR.
Les fleurs séchées pèsent : $49 \times (1 - \frac{3}{7}) = 49 \times \frac{4}{7} = 28$ kg et leur prix de vente au kg vaut : 2,70+2,40 = 5,10 EUR. Dès lors, le prix de vente des fleurs séchées est : $5,10 \times 28 = 142,8$ EUR.
Ainsi, pour avoir un prix de vente maximum, on doit vendre les fleurs après séchage.