1, 2, 3...Sciences

Année académique 2013-2014

Corrigé de l'examen de math B du 22 mai 2014
biologistes et géologues

Version 22 mai 2014

Exercices

1. **(i) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de la fonction**
$$f : x \mapsto (x+1)^{3/2} - 1.$$

Solution. La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$. Sa dérivée vaut $Df(x) = \frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$ et on a $f(0) = 0$ et $(Df)(0) = \frac{3}{2}$.
Dès lors, l'approximation polynomiale de f à l'ordre 1 en 0 est donnée par

$$P(x) = f(0) + Df(0)x = \frac{3}{2}x, \; x \in \mathbb{R}.$$

(ii) La capacité d'un téléscope à collecter de la lumière est proportionnelle à l'aire de la surface réfléchissante. On suppose que la surface est parabolique et que son aire est donnée par

$$\mathcal{A} = \frac{8\pi}{3}c^2 \left[\left(\frac{d^2}{16c^2} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right]$$

où d est le diamètre du miroir et où c est une constante strictement positive liée à sa forme. Pour de nombreux téléscopes, le nombre $\dfrac{d^2}{16c^2}$ est relativement petit. Montrer alors qu'une approximation de l'aire est donnée par $\frac{\pi d^2}{4}$ en vous servant du résultat trouvé ci-dessus.

Solution. Posons $x = \dfrac{d^2}{16c^2}$; ainsi, x est proche de 0. En remplaçant x dans l'approximation ci-dessus, on a une approximation de l'aire donnée par

$$\text{Approx aire} = \frac{8\pi c^2}{3} \cdot \frac{3}{2} \frac{d^2}{16c^2} = \frac{\pi d^2}{4}.$$

2. **(i) Soient les matrices M_a de la forme**

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel. Montrer que dans le cas des matrices de ce type, le produit matriciel est commutatif. Simplifier au maximum les expressions.

Solution. Soients $A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$. Calculons les produits AB et BA. On a

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -\sin(b)\cos(a) - \sin(a)\cos(b) \\ \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & -\sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} \cos(b)\cos(a) - \sin(b)\sin(a) & -\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \\ \sin(b)\cos(a) + \sin(a)\cos(b) & -\sin(b)\sin(a) + \cos(b)\cos(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}.$$

Le produit de matrices de ce type est donc commutatif puisque $AB = BA$.

(ii) Si possible, diagonaliser la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de B sont les zéros du polynôme

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda(\lambda-3).$$

Dès lors, les valeurs propres de B sont 0 et 3.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$BX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+\sqrt{2}\,y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{2}\,y \\ y = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,y \\ y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(B-3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{2}\,x - y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = \sqrt{2}\,x \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}\,x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont donc des vecteurs du type

$$c' \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

où c' est une constante complexe non nulle.

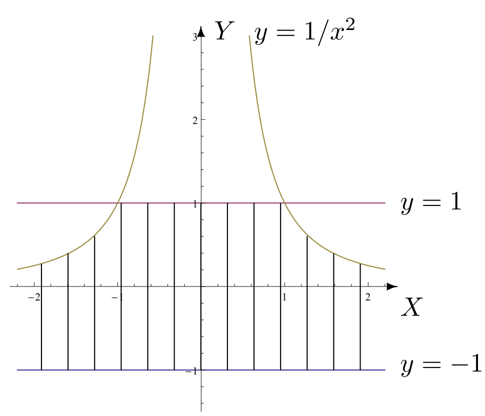
Dès lors, la matrice $S = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, par exemple, est telle que $S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. **On donne une fonction f, continûment dérivable sur l'ensemble**

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| < 1 \text{ et } 0 < 1 - yx^2 \right\}.$$

(i) Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des bords sont exclus de l'ensemble.



(ii) Déterminer le domaine de dérivabilité (inclus dans $[0,\pi]$) de la fonction F donnée explicitement par $F(t) = f\left(\sqrt{2}, 2\cos^2(t)\right)$.

Solution. Le domaine de dérivabilité de la fonction F est égal à

$$B = \left\{t \in \mathbb{R} : |2\cos^2(t)| < 1 \text{ et } 0 < 1 - 4\cos^2(t)\right\} = \left\{t \in \mathbb{R} : \cos^2(t) < \frac{1}{4}\right\}$$
$$= \left\{t \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < \cos(t) < \frac{1}{2}\right\}.$$

Dès lors, dans $[0, \pi]$, le domaine de dérivabilité de F est $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

(iii) Déterminer l'expression explicite de la dérivée de F en fonction des dérivées partielles de f en simplifiant au maximum.

Solution. La dérivée de F est donnée par

$$(DF)(t) = (D_1 f)_{(\sqrt{2}, 2\cos^2(t))} \cdot D\sqrt{2} + (D_2 f)_{(\sqrt{2}, 2\cos^2(t))} \cdot D(2\cos^2(t))$$
$$= -4\sin(t)\cos(t)\,(D_2 f)_{(\sqrt{2}, 2\cos^2(t))} = -2\sin(2t)\,(D_2 f)_{(\sqrt{2}, 2\cos^2(t))}$$

où $D_i f$ est la dérivée de f par rapport à sa i$^{\text{e}}$ variable.

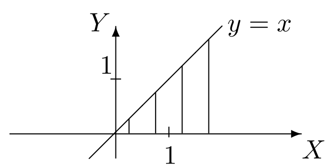
Pour les biologistes uniquement

4. **On considère la succession d'intégrales simples suivante**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{e^{-x+y}}{1+y^2}\, dy \right) dx.$$

(i) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration E ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Comme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, +\infty[,\ x \in [y, +\infty[\}$, en permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x+y}}{1+y^2}\, dx \right) dy.$$

(ii) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{e^{-x+y}}{1+y^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur E, ensemble non fermé borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur E.
Pour y fixé dans $[0, +\infty[$, la fonction $g : x \mapsto \frac{e^y}{1+y^2}\, e^{-x}$ est continue et positive sur $[y, +\infty[$. Pour tout $t > y$ calculons $\lim\limits_{t \to +\infty} \displaystyle\int_y^t \frac{e^y}{1+y^2}\, e^{-x}\, dx$. Si cette limite est finie alors g sera intégrable en $+\infty$ donc sur $[y, +\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de g sur cet ensemble. On a

$$\lim_{t \to +\infty} \int_y^t \frac{e^y}{1+y^2}\, e^{-x}\, dx = -\frac{e^y}{1+y^2} \lim_{t \to +\infty} [e^{-x}]_y^t = -\frac{e^y}{1+y^2} \lim_{t \to +\infty} (e^{-t} - e^{-y}) = \frac{1}{1+y^2}$$

car $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$. La limite étant finie, g est intégrable sur $[y, +\infty[$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $\frac{1}{1+y^2}$.

Considérons $h : y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$, fonction continue sur l'intervalle non borné $[0, +\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0, t]$ $\forall t > 0$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+y^2}\, dy = \lim_{t\to+\infty} [\operatorname{arctg}(y)]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale de h sur cet ensemble vaut $\frac{\pi}{2}$.

Dès lors, f est intégrable sur E et comme cette fonction est positive sur E, la succession d'intégrales vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour les géologues uniquement

4. **(i) On considère la succession d'intégrales simples suivante**

$$I = \int_0^{\ln 2} \left(\int_{1-e^{-x}}^{1+e^x} y\, dy \right) dx.$$

- Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.
Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur le fermé borné $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \ln(2)],\ y \in [1 - e^{-x}, 1 + e^x]\}$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble.

Calculons d'abord

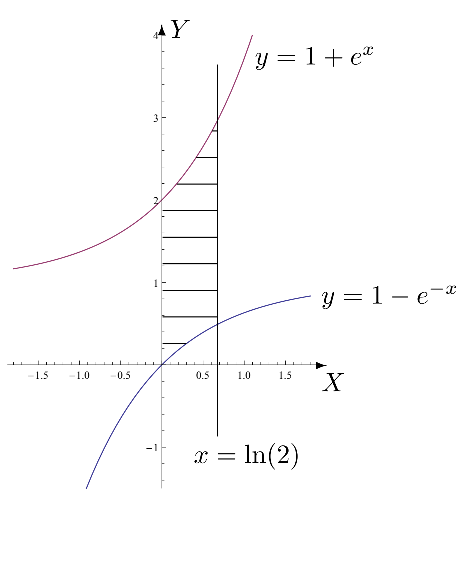
$$I_1 = \int_{1-e^{-x}}^{1+e^x} y\, dy = \frac{1}{2}[y^2]_{1-e^{-x}}^{1+e^x} = \frac{1}{2}(1 + e^{2x} + 2e^x - 1 - e^{-2x} + 2e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 2e^x - e^{-2x} + 2e^{-x}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} (e^{2x} + 2e^x - e^{-2x} + 2e^{-x})\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + \frac{e^{-2x}}{2} - 2e^{-x}\right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2}(2 + 4 + \frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 2) = \frac{1}{2}(4 + \frac{1}{8}) = \frac{33}{16}. \end{aligned}$$

- Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des bords sont inclus de l'ensemble.



- Permuter l'ordre d'intégration.

Solution. L'ensemble d'intégration A peut s'écrire sous la forme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1/2],\ x \in [0, -\ln(1-y)]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1/2,2],\ x \in [0,\ln(2)]\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [2,3],\ x \in [\ln(y-1),\ln(2)]\}.$$

Dès lors, comme f est intégrable sur A, on a

$$I = \int_0^{1/2} \left(\int_0^{-\ln(1-y)} y\ dx \right) dy + \int_{1/2}^{2} \left(\int_0^{\ln(2)} y\ dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_{\ln(y-1)}^{\ln(2)} y\ dx \right) dy.$$

(ii) Si elle existe, déterminer la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x+y}}{1+y^2}\, dx \right) dy.$$

Cf. l'exercice 4 (ii) des biologistes.