1, 2, 3... Sciences

Année académique 2013-2014

Corrigé de l'examen de math B du 22 mai 2014
chimistes, géographes, informaticiens et physiciens

Version 22 mai 2014

$\boxed{\textit{Exercices}}$

1. **La capacité d'un téléscope à collecter de la lumière est proportionnelle à l'aire de la surface réfléchissante. On suppose que la surface est parabolique et que son aire est donnée par**

$$\mathcal{A} = \frac{8\pi}{3}c^2\left[\left(\frac{d^2}{16c^2}+1\right)^{3/2}-1\right]$$

où d est le diamètre du miroir et où c est une constante strictement positive liée à sa forme. Pour de nombreux téléscopes, le nombre $\dfrac{d^2}{16c^2}$ est relativement petit. Montrer alors qu'une approximation de l'aire est donnée par $\frac{\pi d^2}{4}$.

Solution. Posons $x = \dfrac{d^2}{16c^2}$ et considérons la fonction $f : x \mapsto (x+1)^{3/2}-1$ dérivable sur $]-1,+\infty[$; ainsi x est proche de 0. La dérivée de f vaut $Df(x) = \frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$ et on a $f(0) = 0$ et $(Df)(0) = \frac{3}{2}$. Dès lors, l'approximation polynomiale de f à l'ordre 1 en 0 est donnée par

$$P(x) = f(0) + Df(0)x = \frac{3}{2}x,\ x \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x dans l'approximation ci-dessus par $\frac{d^2}{16c^2}$, on a une approximation de l'aire donnée par

$$\text{Approx aire} = \frac{8\pi c^2}{3}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{d^2}{16c^2} = \frac{\pi d^2}{4}.$$

2. **Soient les matrices M_a de la forme**

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel.

i) Déterminer les valeurs propres de ces matrices M_a puis diagonaliser la matrice si $a = \pi/2$.

Solution. Les valeurs propres de M_a sont les zéros du polynôme

$$\det(M_a - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos(a)-\lambda & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a)-\lambda \end{vmatrix} = (\cos(a)-\lambda)^2 + \sin^2(a)$$

$$= (\lambda - \cos(a))^2 - i^2\sin^2(a) = (\lambda - \cos(a) + i\sin(a))(\lambda - \cos(a) - i\sin(a)).$$

Dès lors, les valeurs propres de M_a sont $\cos(a) - i\sin(a)$ et $\cos(a) + i\sin(a)$.

Si $a = \pi/2$ alors la matrice est égale à $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et ses valeurs propres sont $-i$ et i.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $-i$ sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M+iI)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ix - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = ix \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $-i$ sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre i sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M - iI)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - iy = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = iy \\ y = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre i sont donc des vecteurs du type

$$c' \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c' est une constante complexe non nulle.

Dès lors, la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, par exemple, est telle que $S^{-1}MS = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

ii)Montrer que dans le cas des matrices de ce type, le produit matriciel est commutatif. Simplifier au maximum les expressions.

Solution. Soient $A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$. Calculons les produits AB et BA. On a

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -\sin(b)\cos(a) - \sin(a)\cos(b) \\ \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & -\sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} \cos(b)\cos(a) - \sin(b)\sin(a) & -\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \\ \sin(b)\cos(a) + \sin(a)\cos(b) & -\sin(b)\sin(a) + \cos(b)\cos(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}.$$

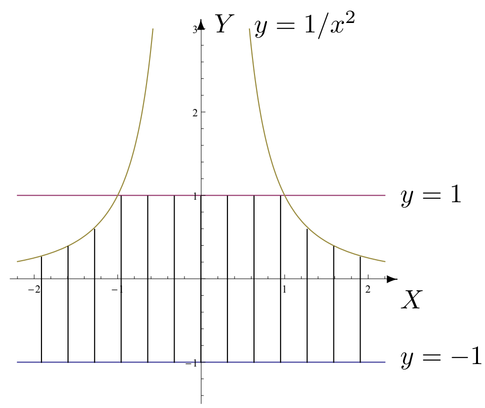
Le produit de matrices de ce type est donc commutatif puisque $AB = BA$.

3. **On donne une fonction f, continûment dérivable sur l'ensemble**

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| < 1 \text{ et } 0 < 1 - yx^2 \right\}.$$

(i) Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des bords sont exclus de l'ensemble.



(ii) Déterminer le domaine de dérivabilité (inclus dans $[0, \pi]$) de la fonction F donnée explicitement par $F(t) = f\left(\sqrt{2}, 2\cos^2(t)\right)$.

Solution. Le domaine de dérivabilité de la fonction F est égal à

$$B = \{t \in \mathbb{R} : |2\cos^2(t)| < 1 \text{ et } 0 < 1 - 4\cos^2(t)\} = \left\{t \in \mathbb{R} : \cos^2(t) < \frac{1}{4}\right\}$$
$$= \left\{t \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < \cos(t) < \frac{1}{2}\right\}.$$

Dès lors, dans $[0, \pi]$, le domaine de dérivabilité de F est $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

(iii) Déterminer l'expression explicite de la dérivée de F en fonction des dérivées partielles de f en simplifiant au maximum.

Solution. La dérivée de F est donnée par

$$(DF)(t) = (D_1 f)_{(\sqrt{2}, 2\cos^2(t))} \,.\, D\sqrt{2} + (D_2 f)_{(\sqrt{2}, 2\cos^2(t))} \,.\, D(2\cos^2(t))$$
$$= -4\sin(t)\cos(t)\,(D_2 f)_{(\sqrt{2}, 2\cos^2(t))} = -2\sin(2t)\,(D_2 f)_{(\sqrt{2}, 2\cos^2(t))}$$

où $D_i f$ est la dérivée de f par rapport à sa i^e variable.

4. **(i) On considère la succession d'intégrales simples suivante**

$$I = \int_0^{\ln 2} \left(\int_{1-e^{-x}}^{1+e^x} y\, dy \right) dx.$$

- Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur le fermé borné $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \ln(2)],\ y \in [1 - e^{-x}, 1 + e^x]\}$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble.

Calculons d'abord

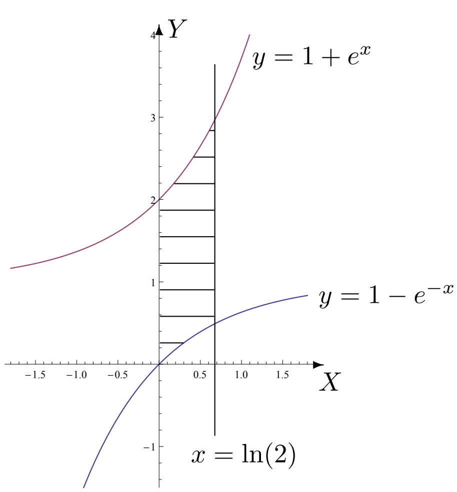
$$I_1 = \int_{1-e^{-x}}^{1+e^x} y\, dy = \frac{1}{2}[y^2]_{1-e^{-x}}^{1+e^x} = \frac{1}{2}(1 + e^{2x} + 2e^x - 1 - e^{-2x} + 2e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 2e^x - e^{-2x} + 2e^{-x}).$$

Ainsi,

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} (e^{2x} + 2e^x - e^{-2x} + 2e^{-x})\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + \frac{e^{-2x}}{2} - 2e^{-x}\right]_0^{\ln 2}$$
$$= \frac{1}{2}(2 + 4 + \frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 2) = \frac{1}{2}(4 + \frac{1}{8}) = \frac{33}{16}.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des bords sont inclus de l'ensemble.



- Permuter l'ordre d'intégration.

Solution. L'ensemble d'intégration A peut s'écrire sous la forme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1/2],\ x \in [0, -\ln(1-y)]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1/2,2],\ x \in [0, \ln(2)]\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [2,3],\ x \in [\ln(y-1), \ln(2)]\}.$$

Dès lors, comme f est intégrable sur A, on a

$$I = \int_0^{1/2} \left(\int_0^{-\ln(1-y)} y\ dx \right)\ dy + \int_{1/2}^{2} \left(\int_0^{\ln(2)} y\ dx \right)\ dy + \int_2^3 \left(\int_{\ln(y-1)}^{\ln(2)} y\ dx \right)\ dy.$$

(ii) Si elle existe, déterminer la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x+y}}{1+y^2}\, dx \right)\ dy.$$

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{e^{-x+y}}{1+y^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur E, ensemble non fermé borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur E.
Pour y fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $g : x \mapsto \frac{e^y}{1+y^2}\, e^{-x}$ est continue et positive sur $[y,+\infty[$. Pour tout $t > y$ calculons $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_y^t \frac{e^y}{1+y^2}\, e^{-x}\ dx$. Si cette limite est finie alors g sera intégrable en $+\infty$ donc sur $[y,+\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de g sur cet ensemble. On a

$$\lim_{t \to +\infty} \int_y^t \frac{e^y}{1+y^2}\, e^{-x}\ dx = -\frac{e^y}{1+y^2} \lim_{t \to +\infty} [e^{-x}]_y^t = -\frac{e^y}{1+y^2} \lim_{t \to +\infty} (e^{-t} - e^{-y}) = \frac{1}{1+y^2}$$

car $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$. La limite étant finie, g est intégrable sur $[y,+\infty[$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $\frac{1}{1+y^2}$.

Considérons $h : y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$, fonction continue sur l'intervalle non borné $[0,+\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+y^2}\ dy = \lim_{t \to +\infty} [\operatorname{arctg}(y)]_0^t = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale de h sur cet ensemble vaut $\frac{\pi}{2}$.

Dès lors, f est intégrable sur E et comme cette fonction est positive sur E, la succession d'intégrales vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

5. **i) Soit A une partie bornée et fermée du plan. Le centre de masse de A est défini comme étant le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\ dx\ dy, \qquad y_A = s^{-1} \int\int_A y\ dx\ dy$$

(s est l'aire de la surface A).
Déterminer l'ordonnée du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un quart de l'anneau constitué par deux cercles concentriques de rayons égaux à une et à quatre unités de longueur.

Solution. L'aire du quart d'anneau vaut : $\frac{\pi}{4}(16-1) = \frac{15\pi}{4}$. La fonction $(x, y) \mapsto y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur l'ensemble d'intégration fermé borné ; elle est donc intégrable sur cet ensemble.
Par un changement de variables en coordonnées polaires, l'ordonnée du centre de masse est donnée par

$$y_A = \frac{4}{15\pi} \int_1^4 \left(\int_0^{\pi/2} r \, . \, r \sin(\theta) \; d\theta \right) \; dr = \frac{4}{15\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^4 \left[-\cos(\theta) \right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{15\pi} \, . \, \frac{64-1}{3} \, . \, 1 = \frac{28}{5\pi}.$$

ii) Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{2m+1}}, \qquad (ii) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln(\pi))^m}{m!}, \qquad (iii) \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{m}{m+1}.$$

Solution. (i) Cette série peut encore s'écrire sous la forme $\displaystyle\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi^2} \right)^m$. C'est une série géométrique convergente car $\displaystyle\frac{1}{\pi^2} \in \,]-1, 1[$. La somme de cette série vaut $\displaystyle\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{1}{\pi^2}} = \frac{\pi}{\pi^2 - 1}$.

(ii) Par définition de l'exponentielle, cette série est convergente et sa somme vaut $\exp(\ln(\pi)) = \pi$.

(iii) Cette série diverge car son terme général ne tend pas vers 0 puisque $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{m}{m+1} = 1$.