1, 2, 3... Sciences

Année académique 2013-2014

Mathématiques générales (partim B)

Corrigé de l'interrogation de math du 25 avril 2014

Version 4 avril 2014

Questions de théorie

1. **Soit f une fonction définie sur l'ensemble $A =]0,2[\times]1,+\infty[$.**
a) Que signifie *"la fonction f est continûment dérivable dans A"* ?
Solution. Voir cours.

b) Soit $g : t \mapsto f\left(\ln(t), t^2-3\right)$ et f continûment dérivable dans A.
Enoncer le théorème de dérivabilité d'une fonction composée dans le cas de la fonction g en déterminant son domaine de dérivabilité ainsi que sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.
Solution. Soient
- f continûment dérivable sur $A =]0,2[\times]1,+\infty[$, ouvert de $\mathbb{R}^2$
- $f_1 :\mapsto \ln(t)$ et $f_2 : t \mapsto t^2-3$ deux fonctions dérivables sur I, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ telles que $\{\left(\ln(t), t^2-3\right) : t \in I\} \subset A$.

Alors $g : t \mapsto f\left(\ln(t), t^2-3\right)$ est dérivable sur I et on a

$$(Dg)(t) = (D_u f)_{(\ln(t),t^2-3)} \;.\; D\ln(t) + (D_v f)_{(\ln(t),t^2-3)} \;.\; D(t^2-3)$$

$$= \frac{1}{t}\,(D_u f)_{(\ln(t),t^2-3)} + 2t\,(D_v f)_{(\ln(t),t^2-3)}$$

si u et v sont respectivement la première et la deuxième variable de f.

Le domaine de dérivabilité de g est

$I = \{t \in \mathbb{R} : t > 0, 0 < \ln(t) < 2, t^2-3 > 1\} = \{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ 1 < t < e^2,\ (t < -2 \text{ ou } t > 2)\} =]2, e^2[$.

2. **Soit A une matrice carrée. Qu'appelle-t-on**
a) valeur propre de A ?
b) polynôme caractéristique de A ?
c) Si λ est une valeur propre de A, quelle propriété a-t-elle vis-à-vis du polynôme caractéristique de A ?
Solution. Voir cours.

Exercices

1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.**
Déterminer le domaine de dérivabilité de f et, dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y)$.

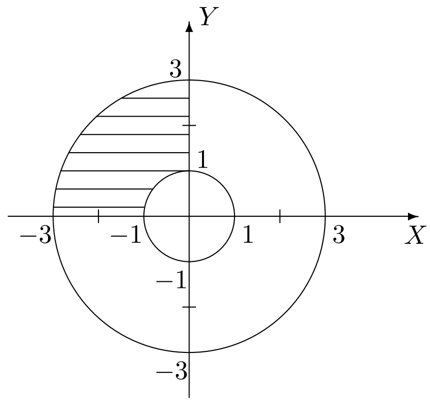
Solution. Le domaine de dérivabilité de f est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$
Comme

$$(D_x f)(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \;.\; \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2} \quad \text{et} \quad (D_y f)(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \;.\; \left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{y^2+x^2},$$

l'expression donnée est nulle.

2. **Déterminer, si possible, la valeur de l'intégrale** $\displaystyle\iint_A \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ **avec** $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \le 0,\ y \ge 0\right\}$ **et représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant.**

Solution. Voici la représentation graphique de A ; les points des cercles et des axes sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc sur A, ensemble fermé borné ; dès lors, elle est intégrable sur A.
En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration est $A' = \{(r, \theta) : r \in [1,3], \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]\}$ et dès lors on doit calculer

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_1^3 r \, \frac{1}{r^2} \, dr \right) \, d\theta.$$

Comme on a

$$I_1 = \int_1^3 \frac{1}{r} \, dr = [\ln(r)]_1^3 = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3), \text{ l'intégrale } I \text{ vaut } \frac{\pi}{2} \ln(3).$$

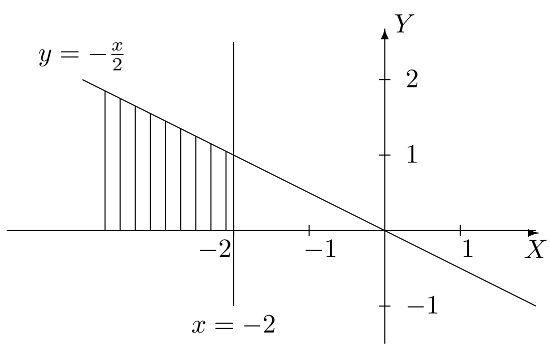
3. **Soit f une fonction intégrable sur une partie A du plan telle que**

$$\iint_A f(x, y) \, dxdy \;=\; \int_{-\infty}^{-2} \left(\int_0^{-\frac{x}{2}} f(x, y) \, dy \right) \, dx.$$

a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant.
Solution. On a

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\infty, -2], y \in \left[0, -\frac{x}{2}\right] \right\}.$$

Sa représentation graphique est la suivante



L'ensemble A peut aussi s'écrire sous la forme

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], \; x \in]-\infty, -2] \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[, \; x \in]-\infty, -2y] \right\}.$$

b) Permuter l'ordre d'intégration.
Solution. En permutant les intégrales, on a

$$\iint_A f(x, y) \, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{-2} f(x, y) \, dx \right) dy + \int_1^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{-2y} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

4. **Soit la matrice** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**. Démontrer que**

a) $-\sqrt{2}$ **est une valeur propre de** A

b) le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ **est un vecteur propre de** A **de valeur propre** $-\sqrt{2}$

Solution. a) Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda + \lambda - \lambda^3 = \lambda(2 - \lambda^2)$$

si on applique la première loi des mineurs à la troisième ligne. En calculant la valeur de ce polynôme en $-\sqrt{2}$, on constate que $P(-\sqrt{2}) = 0$. Dès lors, $-\sqrt{2}$ est bien une valeur propre de A.

b) Si on note X le vecteur non nul donné, le produit AX vaut

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\, X,$$

ce qui prouve que X est bien un vecteur propre de A relatif à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

5. **Si** $A = \begin{pmatrix} i^2 & -2 \\ i & \frac{1}{i} \end{pmatrix}$**, déterminer la matrice carrée** B **telle que** $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Solution. La matrice A peut encore s'écrire sous la forme $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ i & -i \end{pmatrix}$ et la matrice B cherchée est l'inverse de A, s'il existe. Comme $\det(A) = 3i \neq 0$, l'inverse existe et on a

$$B = A^{-1} = \frac{1}{3i} \begin{pmatrix} -i & -i \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-i}{3} \begin{pmatrix} -i & 2 \\ -i & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$