Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2013-2014

Corrigé de l'examen de math B du 18 août 2014
Biologistes et géologues

Version 14 juillet 2014

$\boxed{\textbf{\textit{Exercices}}}$

1. **(a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$**

Solution. Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée de f vaut

$$Df(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

et on a $f(0) = 0$ et $(Df)(0) = 1$.
Dès lors, l'approximation polynomiale de f à l'ordre 1 en 0 est donnée par

$$P(x) = f(0) + (Df)(0)x = x, \ x \in \mathbb{R}.$$

(b) La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\ th\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)$$

où g est l'accélération due à la pesanteur et $th : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
En vous servant du résultat trouvé ci-dessus, montrer que si $\frac{h}{\lambda}$ est petit, une approximation du carré de la vitesse est donnée par $g\,h$.

Solution. Posons $x = \dfrac{2\pi h}{\lambda}$ et considérons la fonction $th : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Par le résultat trouvé ci-dessus, on sait que l'approximation polynomiale de th à l'ordre 1 en 0 est donnée par

$$P(x) = th(0) + (D\ th)(0)x = x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Si $\frac{h}{\lambda}$ est petit, alors $\frac{2\pi h}{\lambda}$ l'est également ; en remplaçant x dans l'approximation ci-dessus par $\dfrac{2\pi h}{\lambda}$, on a une approximation du carré de la vitesse donnée par

$$\text{Approx carré de la vitesse} = \frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi h}{\lambda} = gh.$$

2. **(a) Soient les matrices A et B données respectivement par**

$$A = \begin{pmatrix} i^3 & \frac{1}{i} & 2 \\ -1 & 0 & (1+i)^2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{et} \qquad B = \begin{pmatrix} (1-i)^2 & -i^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si c'est possible, calculer $\widetilde{A}B^*$.

Solution. La matrice $\widetilde{A}$ étant de type 3×2 et B^* étant de type 2×2, le produit $\widetilde{A}B^*$ est possible et on obtient une matrice de type 3×2. Puisque

$$A = \begin{pmatrix} -i & -i & 2 \\ -1 & 0 & 2i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\widetilde{A}B^*$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 0 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 6i & 2i \end{pmatrix}$$

(b) Si possible, diagonaliser C en précisant une matrice qui permet d'obtenir cette forme diagonale si
$$C = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de C sont les zéros du polynôme
$$\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} = 2+3\lambda+\lambda^2-2 = \lambda(\lambda+3).$$
Dès lors, les valeurs propres de C sont 0 et -3.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que
$$CX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x+\sqrt{2}\,y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\,y \\ y = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,y \\ y \end{pmatrix}.$$
Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc des vecteurs du type
$$c\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
où c est une constante complexe non nulle.

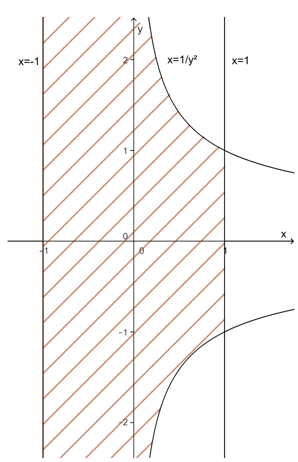
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -3 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que
$$(C+3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{2}\,x+y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = -\sqrt{2}\,x \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{2}\,x \end{pmatrix}.$$
Les vecteurs propres associés à la valeur propre -3 sont donc des vecteurs du type
$$c'\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
où c' est une constante complexe non nulle.

Dès lors, la matrice $S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, par exemple, est telle que $S^{-1}CS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3. **On donne une fonction f, continûment dérivable sur l'ensemble**
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < 1 \text{ et } 0 < 1 - xy^2\right\}.$$

(a) Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des bords sont exclus de l'ensemble.



(b) Déterminer le domaine de dérivabilité (inclus dans $[\pi, 2\pi]$) de la fonction F donnée explicitement par $F(t) = f\left(2\cos^2(t), \sqrt{2}\right)$.

Solution. Le domaine de dérivabilité de la fonction F est égal à

$$B = \left\{t \in \mathbb{R} : |2\cos^2(t)| < 1 \text{ et } 0 < 1 - 4\cos^2(t)\right\} = \left\{t \in \mathbb{R} : \cos^2(t) < \frac{1}{4}\right\}$$
$$= \left\{t \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < \cos(t) < \frac{1}{2}\right\}.$$

Dès lors, dans $[\pi, 2\pi]$, le domaine de dérivabilité de F est $\left]\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$.

(c) Déterminer l'expression explicite de la dérivée de F en fonction des dérivées partielles de f en simplifiant au maximum.

Solution. La dérivée de F est donnée par

$$\begin{aligned}(DF)(t) &= (D_1 f)_{(2\cos^2(t),\sqrt{2})} \cdot D(2\cos^2(t)) + (D_2 f)_{(2\cos^2(t),\sqrt{2})} \cdot D\sqrt{2} \\ &= -4\sin(t)\cos(t)\,(D_1 f)_{(2\cos^2(t),\sqrt{2})} = -2\sin(2t)\,(D_1 f)_{(2\cos^2(t),\sqrt{2})}\end{aligned}$$

où $D_i f$ est la dérivée de f par rapport à sa i^e variable.

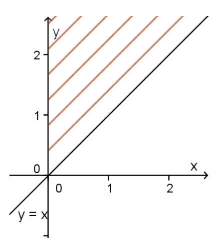
Pour les biologistes uniquement

4. **On considère la succession d'intégrales simples suivante**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y \frac{e^{-y+x}}{1+x^2}\, dx\right) dy.$$

(a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration E ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Comme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in [x, +\infty[\}$, en permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-y+x}}{1+x^2}\, dy\right) dx.$$

(b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{e^{-y+x}}{1+x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur E, ensemble non fermé borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur E.
Pour x fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}$ est continue et positive sur $[x,+\infty[$. Pour tout $t > x$, calculons $\lim\limits_{t\to+\infty} \displaystyle\int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\, dy$. Si cette limite est finie alors g sera intégrable en $+\infty$ donc sur $[x,+\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de g sur cet ensemble. On a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\, dy = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t\to+\infty} [e^{-y}]_x^t = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t\to+\infty} (e^{-t} - e^{-x}) = \frac{1}{1+x^2}$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$. La limite étant finie, g est intégrable sur $[x,+\infty[$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $\frac{1}{1+x^2}$.

Considérons $h : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, fonction continue et positive sur l'intervalle non borné $[0,+\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\, dy = \lim_{t\to+\infty} [\mathrm{arctg}(x)]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale de h sur cet ensemble vaut $\frac{\pi}{2}$.

Dès lors, f est intégrable sur E , on peut permuter les intégrales et la succession d'intégrales vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour les géologues uniquement

4. **(a) On considère la succession d'intégrales simples suivante**

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_x^{e^x - 1} dy \right) dx.$$

- Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur le fermé borné $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1],\ y \in [x, e^x - 1]\}$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble.

Calculons d'abord

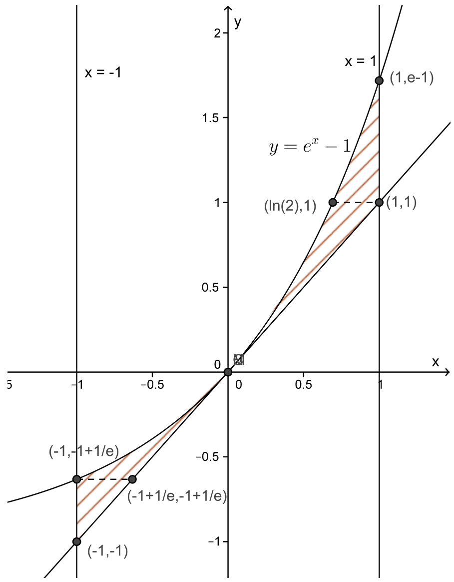
$$I_1 = \int_x^{e^x-1} dy = [y]_x^{e^x-1} = e^x - 1 - x.$$

Ainsi,

$$I = \int_{-1}^{1} (e^x - 1 - x)\, dx = \left[e^x - x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = e - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{2} = e - \frac{1}{e} - 2.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des bords sont inclus dans l'ensemble.



- Permuter l'ordre d'intégration. *Solution.* L'ensemble d'intégration A peut s'écrire sous la forme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[-1, \frac{1}{e} - 1\right],\ x \in [-1, y]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{1}{e} - 1, 1\right],\ x \in [\ln(y+1), y]\right\}$$

$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, e-1],\ x \in [\ln(y+1), 1]\}.$$

Dès lors, comme f est intégrable sur A, on a

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{e}-1} \left(\int_{-1}^{y} dx \right) dy + \int_{\frac{1}{e}-1}^{1} \left(\int_{\ln(y+1)}^{y} dx \right) dy + \int_{1}^{e-1} \left(\int_{\ln(y+1)}^{1} dx \right) dy.$$

(b) Si elle existe, déterminer la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-y+x}}{1+x^2}\, dy \right) dx.$$

Cf. l'exercice 4 (b) des biologistes.

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2013-2014

Corrigé de l'examen de math B du 18 août 2014
chimistes, géographes, informaticiens et physiciens

Version 28 août 2014

Exercices

1. **La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression**

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\ th\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)$$

où g est l'accélération due à la pesanteur et th est la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
Montrer que si $\frac{h}{\lambda}$ est petit, une approximation du carré de la vitesse est donnée par $g\,h$.

Solution. Posons $x = \dfrac{2\pi h}{\lambda}$ et considérons la fonction $th : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée de th vaut $D\ th(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ et on a $th(0) = 0$ et $(D\ th)(0) = 1$.
Dès lors, l'approximation polynomiale de th à l'ordre 1 en 0 est donnée par

$$P(x) = th(0) + (D\ th)(0)x = x,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Si $\frac{h}{\lambda}$ est petit, alors $\frac{2\pi h}{\lambda}$ l'est également ; en remplaçant x dans l'approximation ci-dessus par $\dfrac{2\pi h}{\lambda}$, on a une approximation du carré de la vitesse donnée par

$$\text{Approx carré de la vitesse} = \frac{g\lambda}{2\pi}\ .\ \frac{2\pi h}{\lambda} = gh.$$

2. **(a) Soient les matrices M_a de la forme**

$$\begin{pmatrix} -\cos(a) & \sin(a) \\ \sin(a) & -\cos(a) \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel.
Déterminer les valeurs propres de ces matrices M_a puis diagonaliser la matrice si $a = 3\pi/2$. Donner une matrice qui permet d'obtenir cette forme diagonale.

Solution. Les valeurs propres de M_a sont les zéros du polynôme

$$\det(M_a - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\cos(a) - \lambda & \sin(a) \\ \sin(a) & -\cos(a) - \lambda \end{vmatrix} = (\cos(a) + \lambda)^2 - \sin^2(a)$$
$$= (\cos(a) + \lambda + \sin(a))(\cos(a) + \lambda - \sin(a)).$$

Dès lors, les valeurs propres de M_a sont $-\cos(a) - \sin(a)$ et $-\cos(a) + \sin(a)$.

Si $a = 3\pi/2$ alors la matrice est égale à $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et ses valeurs propres sont 1 et -1.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(M-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x-y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(M+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont donc des vecteurs du type

$$c' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c' est une constante complexe non nulle.

Dès lors, la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, par exemple, est telle que $S^{-1}MS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Soient les matrices A et B données respectivement par

$$A = \begin{pmatrix} i^3 & \frac{1}{i} & 2 \\ -1 & 0 & (1+i)^2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{et} \qquad B = \begin{pmatrix} (1-i)^2 & -i^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si c'est possible, calculer $\widetilde{A}B^*$.

Solution. La matrice $\widetilde{A}$ étant de type 3×2 et B^* étant de type 2×2, le produit $\widetilde{A}B^*$ est possible et on obtient une matrice de type 3×2. Puisque

$$A = \begin{pmatrix} -i & -i & 2 \\ -1 & 0 & 2i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\widetilde{A}B^*$ est donnée par

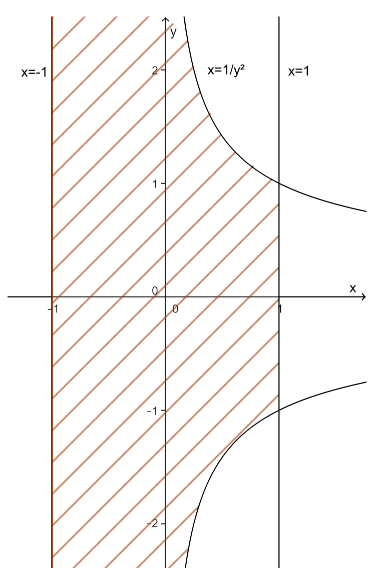
$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 0 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 6i & 2i \end{pmatrix}$$

3. **On donne une fonction f, continûment dérivable sur l'ensemble**

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < 1 \text{ et } 0 < 1 - xy^2\right\}.$$

(a) Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des bords sont exclus de l'ensemble.



(b) Déterminer le domaine de dérivabilité (inclus dans $[\pi, 2\pi]$) de la fonction F donnée explicitement par $F(t) = f\left(2\cos^2(t), \sqrt{2}\right)$.

Solution. Le domaine de dérivabilité de la fonction F est égal à

$$B = \left\{t \in \mathbb{R} : |2\cos^2(t)| < 1 \text{ et } 0 < 1 - 4\cos^2(t)\right\} = \left\{t \in \mathbb{R} : \cos^2(t) < \frac{1}{4}\right\}$$
$$= \left\{t \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < \cos(t) < \frac{1}{2}\right\}.$$

Dès lors, dans $[\pi, 2\pi]$, le domaine de dérivabilité de F est $\left]\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$.

(c) Déterminer l'expression explicite de la dérivée de F en fonction des dérivées partielles de f en simplifiant au maximum.

Solution. La dérivée de F est donnée par

$$(DF)(t) = (D_1 f)_{(2\cos^2(t), \sqrt{2})} \ . \ D(2\cos^2(t)) + (D_2 f)_{(2\cos^2(t), \sqrt{2})} \ . \ D\sqrt{2}$$
$$= -4\sin(t)\cos(t)\,(D_1 f)_{(2\cos^2(t), \sqrt{2})} = -2\sin(2t)\,(D_1 f)_{(2\cos^2(t), \sqrt{2})}$$

où $D_i f$ est la dérivée de f par rapport à sa i^{e} variable.

4. **(a) On considère la succession d'intégrales simples suivante**

$$I = \int_0^{\ln 2} \left(\int_{1-e^{-y}}^{1+e^y} x \, dx \right) dy.$$

- Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur le fermé borné $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \ln(2)],\ x \in [1 - e^{-y}, 1 + e^y]\}$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble.

Calculons d'abord

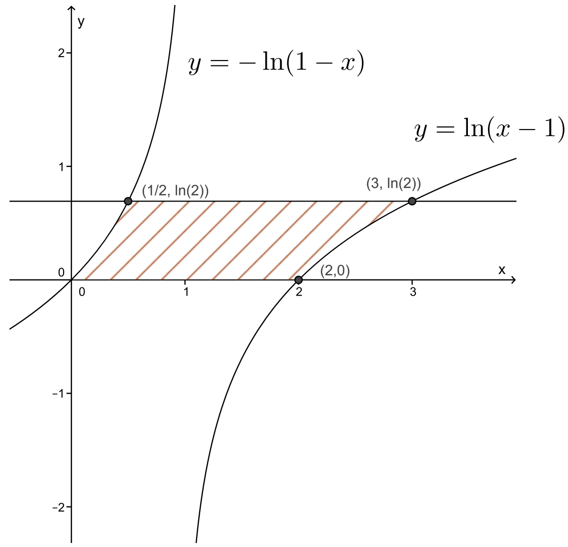
$$I_1 = \int_{1-e^{-y}}^{1+e^y} x \, dx = \frac{1}{2}[x^2]_{1-e^{-y}}^{1+e^y} = \frac{1}{2}(1 + e^{2y} + 2e^y - 1 - e^{-2y} + 2e^{-y}) = \frac{1}{2}(e^{2y} + 2e^y - e^{-2y} + 2e^{-y}).$$

Ainsi,

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} (e^{2y} + 2e^y - e^{-2y} + 2e^{-y}) \, dy = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2y}}{2} + 2e^y + \frac{e^{-2y}}{2} - 2e^{-y}\right]_0^{\ln 2}$$
$$= \frac{1}{2}(2 + 4 + \frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 2) = \frac{1}{2}(4 + \frac{1}{8}) = \frac{33}{16}.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des bords sont inclus dans l'ensemble.



- Permuter l'ordre d'intégration.

Solution. L'ensemble d'intégration A peut s'écrire sous la forme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1/2],\ y \in [0, -\ln(1-x)]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1/2, 2],\ y \in [0, \ln(2)]\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2, 3],\ y \in [\ln(x-1), \ln(2)]\}.$$

Dès lors, comme f est intégrable sur A, on a

$$I = \int_0^{1/2} \left(\int_0^{-\ln(1-x)} x\ dy \right)\ dx + \int_{1/2}^{2} \left(\int_0^{\ln(2)} x\ dy \right)\ dx + \int_2^3 \left(\int_{\ln(x-1)}^{\ln(2)} x\ dy \right)\ dx.$$

(b) Si elle existe, déterminer la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-y+x}}{1+x^2}\ dy \right)\ dx.$$

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{e^{-y+x}}{1+x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in [x, +\infty[\}$, ensemble non fermé borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur E.
Pour x fixé dans $[0, +\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}$ est continue et positive sur $[x, +\infty[$. Pour tout $t > x$ calculons $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\ dy$. Si cette limite est finie alors g sera intégrable en $+\infty$ donc sur $[x, +\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de g sur cet ensemble. On a

$$\lim_{t \to +\infty} \int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\ dy = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t \to +\infty} [e^{-y}]_x^t = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t \to +\infty} (e^{-t} - e^{-x}) = \frac{1}{1+x^2}$$

car $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$. La limite étant finie, g est intégrable sur $[x, +\infty[$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $\frac{1}{1+x^2}$.

Considérons $h : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, fonction continue et positive sur l'intervalle non borné $[0, +\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0, t]$ $\forall t > 0$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\ dx = \lim_{t \to +\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_0^t = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}.$$

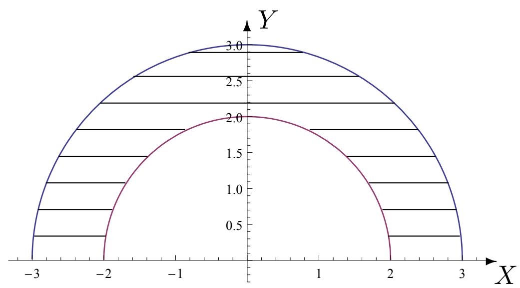
Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale de h sur cet ensemble vaut $\frac{\pi}{2}$.

Dès lors, f est intégrable sur E et la succession d'intégrales vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

5. **(a) En physique, le concept de moment d'inertie sert à étudier les mouvements rotatifs des solides autour d'un axe. Considérons un repère orthonormé (O,x,y,z) de l'espace et une partie bornée et fermée A du plan d'équation $z=0$. Le moment d'inertie I d'un cylindre homogène de base A par rapport à l'axe des z est donné par la formule suivante**

$$I = \frac{m}{s}\iint_A (x^2+y^2)\ dx\,dy,$$

où m et s sont respectivement la masse du cylindre et l'aire de A.
Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe des z d'un cylindre homogène de masse m dont la base est la partie hachurée ci-dessous.



Solution. L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné fermé

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9, y\geqslant 0\}$$

et la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=x^2+y^2$ est continue, donc intégrable sur A. Si on travaille en coordonnées polaires, cet ensemble est décrit par

$$A' = \{(r,\theta)\in[2,3]\times[0,\pi]\}.$$

Il en résulte que le moment d'inertie recherché vaut

$$I = \frac{m}{s}\iint_A (x^2+y^2)\ dxdy = \frac{m}{s}\iint_{A'}\left((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right)\ .\ r\ drd\theta$$

$$= \frac{m}{s}\int_2^3\left(\int_0^\pi r^3 d\theta\right)\ dr = \frac{m}{s}\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_2^3 = \frac{m}{s}\pi\ .\ \frac{81-16}{4} = \frac{65m\pi}{4s}.$$

Enfin, comme $s=\pi\dfrac{3^2-2^2}{2}=\dfrac{5\pi}{2}$, on a $\quad I=\dfrac{13\ m}{2}$.

(b) Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i)\ \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{2^m}{m!}, \qquad (ii)\ \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\cos^2(m\pi)}{3^{2m}}, \qquad (iii)\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\ln(m)}{m}.$$

Solution. (i) Par définition de l'exponentielle, cette série est convergente et sa somme vaut $\exp(2)$.

(ii) Cette série peut encore s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2m}}{3^{2m}} - = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{9^m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^m$. C'est une série géométrique convergente car $\dfrac{1}{9}\in\,]-1,1[$. La somme de cette série vaut $\dfrac{1}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{9}{8}$.

(iii) On a $\frac{ln(m)}{m} > \frac{1}{m}$, quel que soit le naturel $m>e$. Comme la série de terme général $\frac{1}{m}$ ne converge pas, on en déduit que la série donnée (de terme général $\frac{ln(m)}{m}$) ne converge pas non plus.

Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2013-2014

Corrigé de l'examen de math B du 18 août 2014
Biologistes et géologues

Version 28 août 2014

$\boxed{\textit{Exercices}}$

1. **(a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$**

   Solution. Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée de f vaut

   $$Df(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

   et on a $f(0) = 0$ et $(Df)(0) = 1$.
   Dès lors, l'approximation polynomiale de f à l'ordre 1 en 0 est donnée par

   $$P(x) = f(0) + (Df)(0)x = x,\ x \in \mathbb{R}.$$

   (b) La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

   $$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\ th\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)$$

   où g est l'accélération due à la pesanteur et $th : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
   En vous servant du résultat trouvé ci-dessus, montrer que si $\frac{h}{\lambda}$ est petit, une approximation du carré de la vitesse est donnée par $g\,h$.
   Solution. Posons $x = \dfrac{2\pi h}{\lambda}$ et considérons la fonction $th : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Par le résultat trouvé ci-dessus, on sait que l'approximation polynomiale de th à l'ordre 1 en 0 est donnée par

   $$P(x) = th(0) + (D\ th)(0)x = x,\ x \in \mathbb{R}.$$

   Si $\frac{h}{\lambda}$ est petit, alors $\frac{2\pi h}{\lambda}$ l'est également ; en remplaçant x dans l'approximation ci-dessus par $\dfrac{2\pi h}{\lambda}$, on a une approximation du carré de la vitesse donnée par

   $$\text{Approx carré de la vitesse} = \frac{g\lambda}{2\pi}\ .\ \frac{2\pi h}{\lambda} = gh.$$

2. **(a) Soient les matrices A et B données respectivement par**

   $$A = \begin{pmatrix} i^3 & \frac{1}{i} & 2 \\ -1 & 0 & (1+i)^2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{et} \qquad B = \begin{pmatrix} (1-i)^2 & -i^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Si c'est possible, calculer $\widetilde{A}B^*$.

   Solution. La matrice $\widetilde{A}$ étant de type 3×2 et B^* étant de type 2×2, le produit $\widetilde{A}B^*$ est possible et on obtient une matrice de type 3×2. Puisque

   $$A = \begin{pmatrix} -i & -i & 2 \\ -1 & 0 & 2i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   $\widetilde{A}B^*$ est donnée par

   $$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 0 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 6i & 2i \end{pmatrix}$$

(b) Si possible, diagonaliser C en précisant une matrice qui permet d'obtenir cette forme diagonale si

$$C = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de C sont les zéros du polynôme

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} = 2 + 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda(\lambda+3).$$

Dès lors, les valeurs propres de C sont 0 et -3.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$CX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x+\sqrt{2}\,y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\,y \\ y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,y \\ y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -3 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(C+3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{2}\,x+y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -\sqrt{2}\,x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{2}\,x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -3 sont donc des vecteurs du type

$$c'\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

où c' est une constante complexe non nulle.

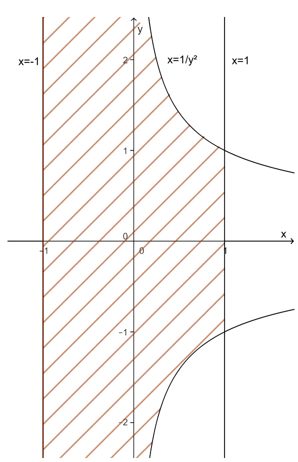
Dès lors, la matrice $S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, par exemple, est telle que $S^{-1}CS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3. **On donne une fonction f, continûment dérivable sur l'ensemble**

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < 1 \text{ et } 0 < 1 - xy^2\right\}.$$

(a) Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des bords sont exclus de l'ensemble.



(b) Déterminer le domaine de dérivabilité (inclus dans $[\pi, 2\pi]$) de la fonction F donnée explicitement par $F(t) = f\left(2\cos^2(t), \sqrt{2}\right)$.

Solution. Le domaine de dérivabilité de la fonction F est égal à

$$\begin{aligned} B = \left\{t \in \mathbb{R} : |2\cos^2(t)| < 1 \text{ et } 0 < 1 - 4\cos^2(t)\right\} &= \left\{t \in \mathbb{R} : \cos^2(t) < \frac{1}{4}\right\} \\ &= \left\{t \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < \cos(t) < \frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Dès lors, dans $[\pi, 2\pi]$, le domaine de dérivabilité de F est $\left]\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$.

(c) Déterminer l'expression explicite de la dérivée de F en fonction des dérivées partielles de f en simplifiant au maximum.

Solution. La dérivée de F est donnée par

$$\begin{aligned} (DF)(t) &= (D_1 f)_{(2\cos^2(t), \sqrt{2})} \cdot D(2\cos^2(t)) + (D_2 f)_{(2\cos^2(t), \sqrt{2})} \cdot D\sqrt{2} \\ &= -4\sin(t)\cos(t)\,(D_1 f)_{(2\cos^2(t), \sqrt{2})} = -2\sin(2t)\,(D_1 f)_{(2\cos^2(t), \sqrt{2})} \end{aligned}$$

où $D_i f$ est la dérivée de f par rapport à sa i^e variable.

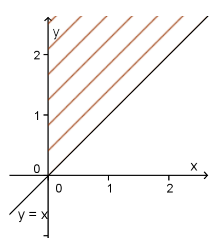
Pour les biologistes uniquement

4. **On considère la succession d'intégrales simples suivante**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y \frac{e^{-y+x}}{1+x^2}\, dx \right) dy.$$

(a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration E ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Comme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in [x, +\infty[\}$, en permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-y+x}}{1+x^2}\, dy \right) dx.$$

(b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{e^{-y+x}}{1+x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur E, ensemble non fermé borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur E.
Pour x fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}$ est continue et positive sur $[x,+\infty[$. Pour tout $t > x$, calculons $\lim\limits_{t\to+\infty} \displaystyle\int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\, dy$. Si cette limite est finie alors g sera intégrable en $+\infty$ donc sur $[x,+\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de g sur cet ensemble. On a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\, dy = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t\to+\infty} [e^{-y}]_x^t = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t\to+\infty} (e^{-t} - e^{-x}) = \frac{1}{1+x^2}$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$. La limite étant finie, g est intégrable sur $[x,+\infty[$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $\frac{1}{1+x^2}$.

Considérons $h : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, fonction continue et positive sur l'intervalle non borné $[0,+\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\, dy = \lim_{t\to+\infty} [\mathrm{arctg}(x)]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale de h sur cet ensemble vaut $\frac{\pi}{2}$.

Dès lors, f est intégrable sur E , on peut permuter les intégrales et la succession d'intégrales vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour les géologues uniquement

4. **(a) On considère la succession d'intégrales simples suivante**

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_x^{e^x-1} dy \right) dx.$$

- Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur le fermé borné $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1],\ y \in [x, e^x - 1]\}$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble.

Calculons d'abord

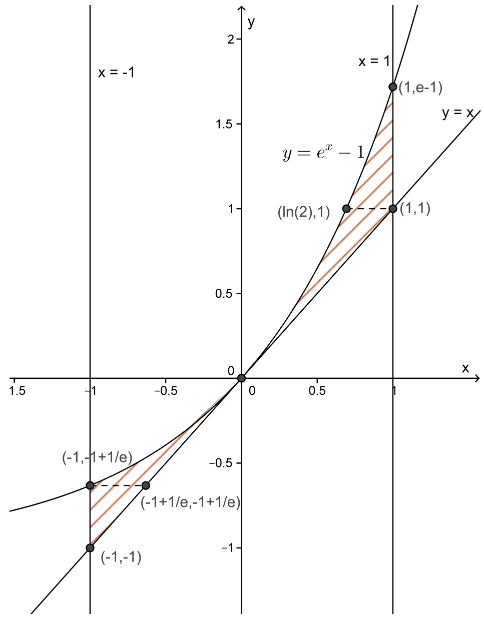
$$I_1 = \int_x^{e^x-1} dy = [y]_x^{e^x-1} = e^x - 1 - x.$$

Ainsi,

$$I = \int_{-1}^{1} (e^x - 1 - x)\, dx = \left[e^x - x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = e - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{2} = e - \frac{1}{e} - 2.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des bords sont inclus dans l'ensemble.



- Permuter l'ordre d'intégration. *Solution.* L'ensemble d'intégration A peut s'écrire sous la forme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[-1, \frac{1}{e} - 1\right],\ x \in [-1, y]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{1}{e} - 1, 1\right],\ x \in [\ln(y+1), y]\right\}$$

$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, e-1],\ x \in [\ln(y+1), 1]\}.$$

Dès lors, comme f est intégrable sur A, on a

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{e}-1} \left(\int_{-1}^{y} dx \right) dy + \int_{\frac{1}{e}-1}^{1} \left(\int_{\ln(y+1)}^{y} dx \right) dy + \int_{1}^{e-1} \left(\int_{\ln(y+1)}^{1} dx \right) dy.$$

(b) Si elle existe, déterminer la valeur de

$$I = \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-y+x}}{1+x^2}\, dy \right) dx.$$

Cf. l'exercice 4 (b) des biologistes.