Université de Liège

1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2013-2014

Mathématiques générales : partim B

Liste 15 : Physique

Version 28 avril 2014

Répétition 15 : analyse vectorielle

1. On donne les équations paramétriques suivantes (autrement dit, des paramétrages) de courbes du plan. Esquisser chacune de ces courbes et en donner une équation cartésienne.

a) $\begin{cases} x(t) = 1 - 2t \\ y(t) = -3 + 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$, $t \in [-1, 1]$

b) $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

e) $\begin{cases} x(t) = -1 + \frac{3}{2}\sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos(t) \end{cases}$, $t \in [-\pi, 3\pi]$

c) $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 4\sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

f) $\begin{cases} x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

2. On donne les équations cartésiennes suivantes de courbes du plan. Esquisser chacune de ces courbes et en donner un paramétrage (autrement dit, des équations paramétriques).

a) $2x + 4y - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

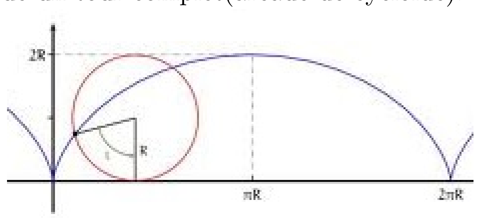
b) $x^2 + y^2 = 1$

d) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

3. On donne $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ l'équation cartésienne d'une courbe plane.
   a) Déterminer un vecteur tangent ainsi qu'un vecteur normal à cette courbe au point de coordonnées $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$.
   b) Donner une représentation de la courbe et de ces vecteurs.
   c) Faire de même pour la courbe plane d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ au point de coordonnées $(-2, 1)$.

4. Déterminer la longueur des courbes données ci-dessous.
   a) L'hélice circulaire située sur un cylindre de rayon R et qui tourne une seule fois autour de ce dernier, la hauteur de chacun de ses points étant proportionnelle à l'angle de la portion du tour parcourue.

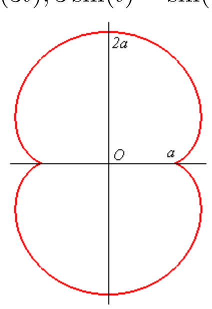
   b) La trajectoire (représentée ci-dessous) décrite par un point fixé sur une roue de rayon $R = 1$ lorsque cette dernière effectue un tour complet(arcade de cycloïde).



Cycloïde de rayon R

   c) L'épicycloïde à 2 rebroussements (représentée ci-dessous) dont une représentation paramétrique est

$$(3\cos(t) - \cos(3t), 3\sin(t) - \sin(3t)),\ t \in [0, 2\pi].$$



Epicycloïde à 2 rebroussements, aussi appelée néphroïde

5. Calculer les intégrales sur les courbes suivantes.

   a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, ds$ où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(0,0)$ et de rayon 1.

   b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x+y)\, ds$ où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(2,1)$ et de rayon 2.

   c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, ds$ où $\mathcal{C}$ est l'arcade de cycloïde considérée à l'exercice 4.b).

6. Calculer les intégrales curvilignes suivantes.

   a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, dx$ (resp. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, dy$) où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(0,0)$ et de rayon 1.

   Comparer ensuite ces deux intégrales à celle calculée à l'exercice 5.a).

   b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} ydx + xdy$ où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(0,0)$ et de rayon R.

   c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ où $\mathcal{C}$ est la courbe décrite par l'ensemble

   $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + \tfrac{y^2}{9} = 1,\ x, y \geq 0\}.$$

7. Une particule qui se déplace dans le plan est soumise à un champ de force

   $$\overrightarrow{F} = (x - ay)\overrightarrow{e_x} + (3y - 2x)\overrightarrow{e_y}.$$

   Calculer (en fonction du paramètre a) le travail exercé par cette force
   a) si la particule se déplace en ligne droite de l'origine au point de coordonnées $(2,4)$;
   b) si la particule effectue un tour le long d'un cercle centré à l'origine et de rayon 2 (dans le sens trigonométrique).