
Université
de Liège



1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
RÉVISIONS EN VUE DE L'INTERROGATION DU 20 AVRIL 2015

RÉPÉTITION : RÉVISIONS

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. On donne la fonction f par

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \arccos(x^2 + y + 1)$$

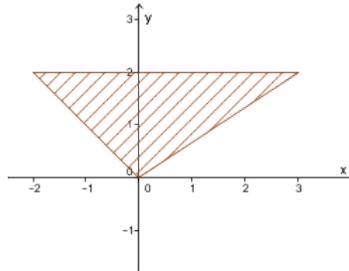
- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.
 - Calculer la dérivée de f par rapport à sa première variable.
 - Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(2t, 5t^2 - 1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.
 - Si F est dérivable en $1/9$, que vaut sa dérivée en ce point ? Simplifier votre réponse au maximum.
2. On donne la fonction f continûment dérivable sur $] -\infty, 1[\times] 0, 3[$ et à valeurs strictement positives.
- Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \ln(f(\ln(2-x), \sqrt{x}))$.
 - Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.
 - Si g est dérivable en $3/2$, que vaut sa dérivée en ce point ?
3. a) Esquisser la représentation graphique de la surface quadrique d'équation

$$4x^2 + y^2 - z + 1 = 0.$$

- Quel est le nom de cette quadrique ?
- Calculer le volume du corps borné par les plans de coordonnées, le plan d'équation $2x + y = 1$ et la surface donnée ci-dessus.

4. On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer

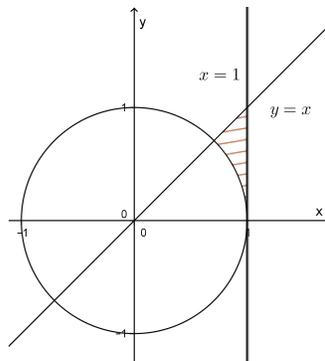
$$\iint_A y e^{y-2x} dx dy.$$



5. Calculer, si possible l'intégrale suivante

$$\iint_A \frac{x^2 + y^2}{xy} dx dy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



6. La fonction f étant supposée intégrable, permuter l'ordre d'intégration après avoir représenté l'ensemble d'intégration si

$$I = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2-x}} f(x, y) dy \right) dx.$$

7. Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -1, \sqrt{-y} \leq x \leq -y\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x < 0\}$. Calculer, si possible, les intégrales suivantes et représenter leurs ensembles d'intégration.

a) $\iint_A \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2} dx dy$ b) $\iint_B \sin(x-y) e^y dx dy$ c) $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{x e^{-y}}{y} dy \right) dx.$

8. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Pourquoi?

Si oui, en déterminer une forme diagonale Δ ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

9. Soient les matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{i} \\ 0 & i^3 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} (1-i)^2 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i^6 \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

1) $A + \tilde{B}$ 2) $C = AB$ 3) C^{-1} 4) $\det(A).$