

MATIÈRE DE L'EXAMEN ORAL
Mathématiques générales (B), 2013-2014

1er bachelier en biologie, chimie, géographie, géologie, physique et informatique

Remarque

La liste suivante est plutôt une table des matières détaillée qu'une liste de questions. A l'oral, chaque étudiant doit tirer un carton au sort ; sur ce carton figurent des questions précises portant sur la matière détaillée ici. L'étudiant doit répondre aux questions figurant sur son carton directement au tableau ; l'examen se poursuit par une discussion avec l'interrogateur.

*Si des résultats ont été démontrés au cours,
les démonstrations les concernant pourront faire partie des questions.*

Fonctions de plusieurs variables

1. (Toutes les sections) Qu'appelle-t-on dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables ?
2. (Toutes les sections) Qu'appelle-t-on fonction composée ? Quel est l'énoncé du résultat permettant de trouver les dérivées partielles d'une fonction composée à partir des dérivées partielles des fonctions de départ ?
3. (Toutes les sections) Qu'est-ce qu'une quadrique ? Qu'est-ce qu'une courbe de niveau ? Etre capable de représenter graphiquement ces notions.
4. (Toutes les sections) Expliquer ce que l'on appelle « permutation de l'ordre d'intégration » dans le calcul des intégrales doubles. Peut-on toujours le faire sans changer la valeur du résultat ? Expliquer.
5. (Toutes les sections) Qu'appelle-t-on coordonnées polaires dans le plan ? A partir de la formule de changement de variables dans les intégrales doubles, énoncer et démontrer la formule d'intégration par changement de variables polaires (dans le cas d'intégrales doubles).
6. (Toutes les sections sauf les biologistes) Qu'appelle-t-on coordonnées sphériques (ou encore coordonnées polaires dans l'espace) ? A partir de la formule de changement de variables dans les intégrales triples, énoncer et démontrer la formule d'intégration par changement de variables polaires (dans le cas d'intégrales triples).
7. (Physiciens et informaticiens) En application du changement de variables en coordonnées polaires (dans le plan), déterminer la valeur des l'intégrales du type $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt$ où a est un paramètre réel strictement positif. (Le paramètre a peut être explicitement donné.)
8. (Toutes les sections) Quelle est l'interprétation « graphique » de l'intégrale double d'une fonction continue (et à valeurs positives) sur un ensemble fermé et borné du plan ? Comparer avec l'intégrale d'une fonction continue (et à valeurs positives) sur un intervalle fermé et borné de la droite réelle.

Calcul matriciel

1. (Toutes les sections) Définitions de base relatives aux matrices et aux opérations entre matrices
2. (Toutes les sections) Propriétés des opérations entre matrices
3. (Toutes les sections) Définitions et propriétés de base relatives aux déterminants de matrices carrées
4. (Toutes les sections) Inversion de matrices carrées (définitions, propriétés, ...)
5. (Toutes les sections) Vecteurs propres, valeurs propres d'une matrice carrée
6. (Toutes les sections) Diagonalisation des matrices carrées
7. (Tous sauf biologistes) Matrices « stochastiques »

Approximations polynomiales et séries

1. (Toutes les sections) Qu'appelle-t-on approximation polynomiale d'une fonction en un point de son domaine de définition? Quelle est l'expression explicite de cette approximation quand la fonction est suffisamment dérivable?
2. (Toutes les sections) Enoncer le résultat appelé « Développement limité de Taylor » et le relier aux notions d'approximation polynomiale et de reste de l'approximation polynomiale d'une fonction en un point.
3. (Tous sauf biologistes) Qu'appelle-t-on série? Qu'appelle-t-on série convergente?
4. (Tous sauf biologistes) Qu'appelle-t-on série géométrique, série de Riemann? Dire que ces séries sont convergentes, qu'est-ce que cela signifie? Dans quels cas sont-elles des séries convergentes? Dans le cas d'une série géométrique, que vaut alors la somme (c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles).
5. (Tous sauf biologistes) Définition de la fonction exponentielle qui utilise la convergence des séries.
6. (Tous sauf biologistes et géologues) - Qu'appelle-t-on série de puissances?
 - Etre capable de développer une fonction donnée en séries de puissances (et d'en étudier la convergence).
 - Toutes les fonctions (indéfiniment continûment dérivables) peuvent-elles s'exprimer en une série de puissances au voisinage d'un point de leur domaine de dérivabilité?
7. - (Toutes les sections) Enoncés des propriétés fondamentales de la fonction exponentielle.
 - (Tous sauf biologistes et géologues) Preuves des propriétés dont il est question ci-dessus (à partir de la définition de l'exponentielle par une série).
8. (Tous sauf biologistes et géologues) Lien entre la convergence de la série de Riemann $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}}$ et l'intégrabilité sur l'intervalle $[1, +\infty[$ de la fonction $f_{\alpha}(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}, x \geq 1$.