1, 2, 3...Sciences

Année académique 2014-2015

Mathématiques générales, second quadrimestre

Compléments aux notes de cours

Version 15 mars 2015 (V1 : 05/03/2010)

Matrices dites « stochastiques »

La référence dans les notes de cours est le chapitre consacré au calcul matriciel, plus précisément aux quelques applications présentées à la fin de celui-ci (*Chaînes de Markov*).

Définitions

- Une *matrice stochastique* est une matrice (généralement) carrée dont les éléments sont des réels positifs et dont la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1.
- Un *vecteur de probabilité* est un vecteur dont les éléments sont des réels positifs et de somme égale à 1. Une matrice stochastique est donc une matrice dont les colonnes sont des vecteurs de probabilité.
- Une matrice stochastique est dite *régulière* lorsque l'une de ses puissances possède des éléments qui sont tous strictement positifs [1].

Propriétés générales

1. **Si T est une matrice stochastique et X un vecteur de probabilité, alors le vecteur TX est encore un vecteur de probabilité.**
2. **Si T est une matrice stochastique et si k est un naturel, alors T^k est encore une matrice stochastique.**
3. **Une matrice stochastique possède toujours la valeur propre 1 et toutes les valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1.**

Preuve. Supposons que les matrices (et les vecteurs) soient de dimension n.

1) Quel que soit $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $(TX)_j = \sum_{k=1}^{n} (T)_{j,k}(X)_k$ donc les éléments de TX sont des réels positifs. De plus, leur somme vaut 1 car on a

$$\sum_{j=1}^{n} (TX)_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (T)_{j,k}(X)_k = \sum_{k=1}^{n} (X)_k \left(\sum_{j=1}^{n} (T)_{j,k} \right) = \sum_{k=1}^{n} (X)_k = 1.$$

2) Procédons par récurrence. On suppose que T est une matrice stochastique. Montrons alors que si k est un naturel tel que la matrice T^k soit stochastique, alors la matrice T^{k+1} l'est aussi. On pourra alors conclure.
De fait, si on désigne par $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de T^k, la matrice T^{k+1} est

$$T^{k+1} = T(C_1 \ldots C_n) = (TC_1 \ldots, TC_n)$$

c'est-à-dire que les colonnes de T^{k+1} apparaissent comme résultant du produit de la matrice stochastique T et des vecteurs de probabilité $C_1, \ldots, C_n$. Vu ce qui précède, il s'agit donc de vecteurs de probabilité et on conclut.

3) Si X est le vecteur colonne dont tous les éléments sont égaux à 1, alors on a $\widetilde{T}X = X$, par définition des matrices stochastiques. Le nombre 1 est donc valeur propre de $\widetilde{T}$, donc de T puisque ces matrices possèdent les mêmes valeurs propres.
Soit maintenant λ une valeur propre quelconque de T. Soit alors X, vecteur propre de $\widetilde{T}$ relatif à celle-ci. Si $k \in \{1, \ldots, n\}$ est tel que $|(X)_k| = \sup \{|(X)_j| \ : 1 \leq j \leq n\}$ alors $|(X)_k| \neq 0$ et

$$\begin{aligned} |\lambda| = \frac{1}{|(X)_k|} \ |(\lambda X)_k| = \frac{1}{|(X)_k|} \left| \left(\widetilde{T}X\right)_k \right| \quad &= \quad \frac{1}{|(X)_k|} \left| \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{T})_{k,j}(X)_j \right| \\ &\leq \quad \frac{1}{|(X)_k|} \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{T})_{k,j} \, |(X)_j| \\ &\leq \quad \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{T})_{k,j} \ = \ 1 \end{aligned}$$

1. On va démontrer que toute puissance d'une matrice stochastique est encore une matrice stochastique

Propriétés plus spécifiques relatives aux chaînes de Markov

1. **Exemple des matrices de dimension 2. Soit T une matrice stochastique, à savoir**
$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$$
avec $a, b \in [0,1]$. Alors
(1) les valeurs propres de T sont les réels 1 et $a-b$
(2) si $a - b \neq 1$, il existe un unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre relatif à la valeur propre 1
(3) si $|a-b| < 1$, pour toute condition initiale X (vecteur de probabilité), la suite $T^k X$ ($k \in \mathbb{N}_0$) converge vers l'unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre relatif à la valeur propre 1.
2. **Soit T une matrice stochastique régulière. Alors**
(1) la valeur propre 1 est de multiplicité 1 et il existe un unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre de valeur propre 1
(2) pour toute condition initiale X (vecteur de probabilité), la suite $T^k X$ ($k \in \mathbb{N}_0$) converge vers l'unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre de valeur propre 1.

Preuve. 1) Vu la définition, toute matrice stochastique peut effectivement s'écrire de manière annoncée.
(1) Par un calcul direct, on obtient
$$det(T - \lambda I) = det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ 1-a & 1-b-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)\ (\lambda - (a-b)).$$
D'où la conclusion du premier point.

(2) Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que
$$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$
ou encore tels que
$$(a-1)x + by = 0.$$
Comme les coefficients $a-1$ et b ne sont pas simultanément nuls, il s'agit donc des vecteurs
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix} \ r \in \mathbb{C}_0.$$
Si un tel vecteur est de probabilité, alors on a $rb + r(1-a) = 1$ donc $r = 1/(1-a+b)$, donc on a l'unicité. Par ailleurs, le vecteur propre obtenu en prenant cette valeur de r est bien un vecteur de probabilité. Donc on conclut pour le point (2).

(3) Désignons par X_0 le vecteur propre de probabilité relatif à la valeur propre 1 et désignons par Y un vecteur propre relatif à la valeur propre $a-b$. Si X est un vecteur quelconque de probabilité, alors il existe des complexes c, c' tels que
$$X = cX_0 + c'Y.$$
On applique alors successivement la matrice T aux deux membres de l'égalité et on obtient ainsi
$$T^k X = cX_0 + c'(a-b)^k Y$$
quel que soit le naturel k. Comme $|a-b| < 1$, on en déduit que la suite $T^k X$ ($k \in \mathbb{N}_0$) converge vers cX_0. Pour conclure, il reste donc à montrer que $c = 1$. De fait, si on désigne par α, β les éléments de Y et par x_0, y_0 les élements de X_0, comme $T^k X$ est un vecteur de probabilité quel que soit k, on a
$$c(x_0 + y_0) + c'(a-b)^k(\alpha + \beta) = 1,\ k \in \mathbb{N}_0.$$
Comme la suite $(a-b)^k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0 et comme $x_0 + y_0 = 1$, on en déduit que $c = 1$ et on conclut.

2) Admis.