Corrigé de l'Examen écrit du 5 janvier 2016

Théorie

Théorie 1.

(i) Définir la notion de transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$.

(ii) Énoncer le théorème de Fourier pour les fonctions intégrables et expliquer clairement l'importance de chaque hypothèse.

(iii) Écrire explicitement l'égalité intervenant dans le théorème de Fourier au moyen de la définition de la transformée de Fourier.

Solution : Cf. cours.

Théorie 2.

(i) Énoncer le développement limité de Taylor à l'ordre deux pour une fonction deux fois continûment dérivable dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Définir la notion de point stationnaire.

(iii) Énoncer le développement de Taylor à l'ordre deux dans le cas d'un point stationnaire et expliquer pourquoi on considère le développement en un tel point dans la recherche des extrema.

(iv) Démontrer qu'une matrice réelle symétrique de dimension deux admet toujours deux valeurs propres réelles.

Solution : Cf. cours.

Exercices

Exercice 1. On considère les fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par

$$f(x) = xe^{-|x|} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

(i) Calculer (si possible) les transformées de Fourier (+ et -) de f.

(ii) Si cela a du sens, faire de même avec g.

(iii) Si possible, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^4}\, dx$.

Solution (résumé) :

(i) Tout d'abord, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$, vu qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$. Ensuite, pour $y \in \mathbb{R}$, on a sucessivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} f &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\ x\ e^{-|x|}\, dx \\
&= \pm 2i \int_0^{+\infty} x \sin(xy)\ e^{-x}\, dx \\
&= \pm 2i\ \Im \int_0^{+\infty} x\ e^{(iy-1)x}\, dx.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties et en tenant compte du fait que $\lim_{x\to+\infty} xe^{(iy-1)x} = 0$ (car la limite en $+\infty$ du module de cette expression est nulle), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} f &= \pm 2i\ \Im\left(-\int_0^{+\infty} \frac{e^{(iy-1)x}}{iy-1}\, dx\right)\\
&= \pm 2i\ \Im\left(\frac{1}{(iy-1)^2}\right)\\
&= \pm 2i\ \Im\left(\frac{(iy+1)^2}{(iy-1)^2(iy+1)^2}\right)\\
&= \pm 2i\ \Im\left(\frac{-y^2+2iy+1}{(-y^2-1)^2}\right)\\
&= \frac{\pm 4iy}{(1+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

(ii) De la même manière que pour f, on vérifie que g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, vu (i), on a $g = (\mp i/4)\ \mathcal{F}^{\pm} f$. Donc, si $y \in \mathbb{R}$, il vient

$$\mathcal{F}_y^{\pm} g = \frac{\pm i}{4} \mathcal{F}_y^{\pm}\left(\mathcal{F}^{\mp} f\right) = \frac{\pm i\pi}{2} f(y) = \frac{\pm i\pi}{2} y e^{-|y|}$$

par le théorème de Fourier, car f est continu sur $\mathbb{R}$.

(iii) La fonction à intégrer est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, car elle est continue sur cet intervalle et $\lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{x^2}{(1+x^2)^4} = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^4}\, dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g^2(x)\, dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{-i}{4}\mathcal{F}_x^{+} f\right)\left(\frac{i}{4}\mathcal{F}_x^{-} f\right)\, dx\\
&= \frac{1}{32}\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{F}_x^{+} f\right)\left(\mathcal{F}_x^{-} f\right)\, dx\\
&= \frac{1}{32}\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathcal{F}_x^{+}\left(\mathcal{F}^{-} f\right)\, dx \qquad \text{par le théorème de transfert}\\
&= \frac{\pi}{16}\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\, dx \qquad \text{par le théorème de Fourier}\\
&= \frac{\pi}{8}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\, dx.
\end{aligned}$$

En effectuant deux intégrations par parties consécutives, on arrive alors à

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^4}\, dx = \frac{\pi}{32}.$$

Exercice 2. On considère les fonctions f et g (de deux variables réelles) définies par

$$f(x, y) = e^{-x^2} \operatorname{arctg}(y^2) + x^2 \quad \text{et} \quad g(x, y) = x - xy.$$

(i) Rechercher les éventuels extrema libres des fonctions f et g. Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.

(ii) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de g sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

(iii) En déduire (s'ils existent) les extrema globaux de g dans l'ensemble (à représenter)

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \leq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\right\}.$$

Solution (résumé). On a $f, g \in C_\infty(\mathbb{R}^2)$ et la contrainte (dans (iii)) s'exprime aussi avec une fonction régulière ; on peut donc appliquer tous les résultats permettant de chercher les extrema avec les dérivées.

(i) Le système d'équations donnant les points stationnaires de f fournit la seule solution $(0, 0)$. Vu la forme de f, on a directement

$$f(x, y) \geq 0 = f(0, 0) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

et

$$f(x,y)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y)=(0,0).$$

Il s'ensuit que $(0,0)$ est minimum global strict pour f et qu'il n'y a pas de maximum local.

Le système d'équations donnant les points stationnaires de g fournit la seule solution $(0,1)$. Le déterminant de la matrice hessienne est constant et vaut -1 ; ce point stationnaire n'est donc pas extremum. Remarquons qu'on voit immédiatement que $(0,1)$ (qui donne $g(0,1)=0$) n'est pas extremum car d'une part $g(x,y)=x(1-y)$ est positif si x est positif et y inférieur à 1 et d'autre part, $g(x,y)$ est négatif si x est négatif et y inférieur à 1.

(ii) Les extrema globaux existent car l'ensemble où ils sont demandés est fermé et borné et la fonction à extremaliser y est continue.

Cela étant, la recherche des extrema liés utilisant les multiplicateurs de Lagrange fournit les points

$$(0,1), \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right), \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

qui correspondent respectivement au multiplicateur λ égal à

$$0, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et aux valeurs

$$g(0,1)=0, \qquad g\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Il s'ensuit que,
- le maximum global est atteint au point $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ et il vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- le minimum global est atteint au point $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ et il vaut $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

(iii) L'ensemble A est la partie du disque centré à l'origine et de rayon 1 situé dans le quatrième quadrant (les bords sont compris). Les extrema globaux existent car l'ensemble A où ils sont demandés est fermé et borné et la fonction à extremaliser y est continue ; ils sont en outre réalisés en un point de A.

Cela étant, vu le point (i), g n'a pas de point stationnaire à l'intérieur de A ; il s'ensuit que l'on a

$$\sup\{g(x,y)\ :\ (x,y)\in A\}=g(x_0,y_0)=\sup\{g(x,y)\ :\ (x,y)\in B\}$$

où B désigne le bord de A et où $(x_0,y_0)\in B$. De même pour la borne inférieure.

Le bord de A est constitué de trois parties : le segment paramétré par $(x,0),\ x\in[0,1]$, celui paramétré par $(0,y),\ y\in[-1,0]$ et l'arc de cercle situé dans le quatrième quadrant. Sur chacune de ces parties, on a

$$0\leq g(x,y)\leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4};$$

il s'ensuit que le maximum (resp. minimum) demandé est atteint au point $(x_0,y_0)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ (resp. $(0,y)$, quel que soit $y\in[-1,0]$) et qu'il vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (resp. 0).