

## 2. Extrema libres et sous contraintes

**Exercice 1.** Déterminer les extrema dans  $\mathbb{R}$  des fonctions  $f$  et  $g$  définies par

$$f(x) = x^3 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = (x+1)^2(x-1)^2.$$

**Exercice 2.** Déterminer les éventuels extrema libres des fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad f_2(x, y) = \operatorname{arctg}(xy) \qquad f_3(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$f_4(x, y) = x^2 + y^4 \qquad f_5(x, y) = |x| + |y| \qquad f_6(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$f_7(x, y) = (x + y^2 + 2y) e^{2x} \qquad f_8(x, y) = x^3 + 2xy - 2x^2 + y^2$$

**Exercice 3.** Déterminer les extrema de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto ye^{-x}$  sur le rectangle  $R$  de sommets de coordonnées  $(0, 0)$ ,  $(\ln(2), 0)$ ,  $(\ln(2), 3)$  et  $(0, 3)$ .

**Exercice 4.** Déterminer les extrema globaux dans le disque unité fermé des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x + y$  et  $g(x, y) = x + y^2$ .

**Exercice 5.** Déterminer la valeur du minimum global de la fonction  $m$  définie par

$$m(x, y) = 3x + x^2 - 3y - xy + y^2$$

dans les disques

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\} \quad \text{et} \quad R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$$

**Exercice 6.** Déterminer la distance entre le point de coordonnées  $(0, 1)$  et la courbe d'équation cartésienne  $x^2 - y^2 = 1$ . Représenter la situation.

**Exercice 7.** On donne les fonctions  $f$  et  $g$  explicitement par

$$f(x, y) = xy \quad \text{et} \quad g(x, y) = 4x^2 + y^2.$$

- Déterminer les éventuels extrema libres de  $f$ .
- S'ils existent, déterminer les extrema de  $f$  sous la contrainte  $g(x, y) = 1$ .
- S'ils existent, déterminer les extrema de  $f$  dans l'ensemble (à représenter)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } g(x, y) \leq 1\}.$$

**Exercice 8.** (a) Déterminer les extrema de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^2y$  sur la partie du plan

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

- Déterminer les extrema de la fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$  dans le disque centré en l'origine et de rayon 3.