1. Analyse de Fourier

Exercice 1. En tout point $y \in \mathbb{R}$, calculer si possible

$$\mathcal{F}^{\pm}_{x \to y}\left(xe^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x)\right), \quad \mathcal{F}^{\pm}_{x \to y}\left(e^{ix}e^{-|x|}\right), \quad \mathcal{F}^{\pm}_{x \to y}\left(e^{-|x-1|}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{\pm}_{x \to y}\left(\sin(2x)\chi_{[-1,1]}(x)\right).$$

Exercice 2. Déterminer si possible les transformées de la fonction f définie par $f(x) = e^{-2|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+4}\, dx.$$

Exercice 3. Soient $a, b > 0$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}\, dx.$$

Exercice 4. En utilisant le théorème du transfert, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x)\, dx.$$

Exercice 5. Déterminer les transformées de Fourier des fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Exercice 6. On définit les fonction f et g sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(2\pi x).$$

(a) Ces fonctions appartiennent-elles à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$? Et à $\mathrm{L}^1([0,1])$ et $\mathrm{L}^2([0,1])$?

(b) Calculer $\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}$ et $\|g\|_{\mathrm{L}^2([0,1])}$.

(c) Calculer si possible le produit scalaire dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ des fonctions ifg et if.

Exercice 7. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Calculer si possible le produit de convolution de f et g.

(b) Représenter le graphique des fonctions f, g et $f \star g$.

Exercice 8. (a) Si possible déterminer le produit de convolution des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \chi_{[1,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x\chi_{[-1,+\infty[}(x).$$

(b) Même question avec

$$f(x) = |x| \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 9. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

et la densité spectrale de puissance de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\mathcal{F}^-_y f\right|^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que l'autocorrélation s'écrit

$$E_f = f \star f^s.$$

(b) Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.

(c) Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

(d) Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier (l'une est la transformée de l'autre).

Exercice 10 (Equation de la chaleur). Soit une fonction $u = u(x,t)$ ($x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$) de classe C_2 dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont intégrables par rapport à x sur $\mathbb{R}$ quel que soit $t \geq 0$. Soit v une constante strictement positive. On suppose que u vérifie l'équation de la chaleur

$$D_t\, u(x,t) = v^2 D_x^2\, u(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\, t \geq 0.$$

On pose $f(x) = u(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ et on définit la fonction $F = F(y,t)$ ($y \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$) de telle sorte que, pour t fixé, $F(y,t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x,t)$.

(a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F(y,t)$ vérifie

$$D_t\, F(y,t) + v^2 y^2 F(y,t) = 0.$$

(b) En déduire que, pour $y \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a

$$F(y,t) = e^{-v^2y^2t}\, \mathcal{F}_y^-\, f.$$

(c) En déduire finalement que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2v\sqrt{t}y) e^{-y^2}\, dy.$$

Exercice 11. Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([0,\pi])$ de la fonction f donnée par $f(x) = x$.

Exercice 12. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in\,]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in\,]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f de $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$.

(b) En déduire la valeur des sommes

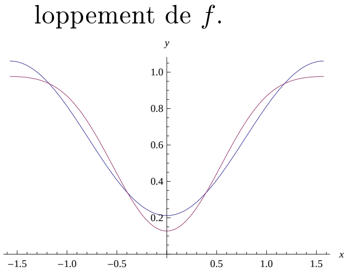
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

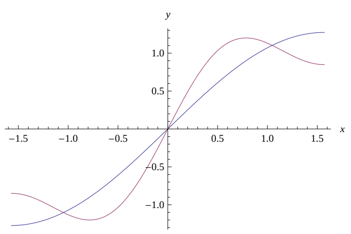
Exercice 13. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin(x)|$.

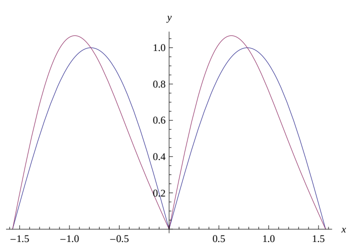
(b) Déterminer la valeur des sommes

$$S_1 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$

(c) Parmi les trois graphiques ci-dessous, déterminer celui qui représente les premiers termes du développement de f.







L. Simons & F. Bastin – 10 septembre 2013