Compléments de mathématiques générales

Année académique 2013-2014
2e Bac Chimie, Géométrologie et Informatique

Révisions – Travail dirigé

Exercice 1. (a) Pour tout $a > 0$, calculer si possible le produit de convolution de la fonction $\chi_{[-a,a]}$ avec elle-même.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx.$$

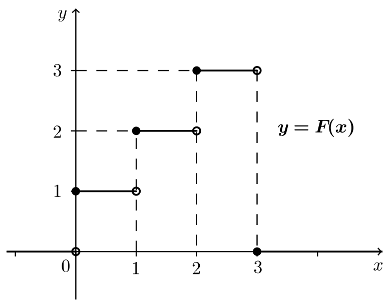
(c) Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose
$$f_m(x) = \frac{\sin(x - m\pi)}{x - m\pi}.$$

(1) Montrer que la transformée de Fourier de f_m ($m \in \mathbb{Z}$) est nulle en dehors d'un intervalle (à déterminer) indépendant de m.

(2) Montrer que cette suite de fonctions $(f_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est orthogonale.

(3) Calculer la norme de f_m ($m \in \mathbb{Z}$).

Exercice 2. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier, notée F, est représentée par le graphique ci-dessous :



Représenter le graphique de la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto f(-x)$ (b) $x \mapsto f(2x)$ (c) $x \mapsto e^{2ix} f(x)$ (d) $x \mapsto (f \star f)(x)$ (e) $x \mapsto -i(Df)(x)$

Exercice 3. Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, calculer si possible la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(x^2 + a^2)}\, dx.$$

Exercice 4. Soit la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

(a) Développer si possible cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.

(b) En déduire la valeur des séries
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4}.$$

Exercice 5. Soient les fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x, y) = 4xy + x^4, \quad g(x, y) = (x + y)^3, \quad h(x, y) = x^2 y \quad \text{et} \quad i(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{-y}.$$

(a) Déterminer les éventuels extrema libres de f, g et i et préciser s'ils sont globaux ou non.

(b) S'ils existent, déterminer les extrema de f sous la contrainte $h(x, y) = 1$.

(c) S'ils existent, déterminer les extrema de g dans le disque fermé de rayon 1 centré en l'origine.

Exercice 6 (Géométrologie & Informatique). Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1 passant par les points $A = (1, 2, 3)$ et $B = (-1, 0, 2)$ et la droite d_2 passant par les points $C = (0, 1, 7)$ et $D = (2, 0, 5)$.

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan Π parallèle à d_1 et contenant d_2.

(b) Calculer la distance entre d_1 et Π.

(c) Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2.

(d) Déterminer un point P_1 de d_1 et un point P_2 de d_2 tels que la droite passant par P_1 et P_2 soit orthogonale à d_1 et d_2.

Exercice 7 (Informatique). (a) Soit a un paramètre réel strictement positif. Etudier la convergence des suites

$$(a^{1/m})_{m\in\mathbb{N}_0} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{m!}{m^m}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}.$$

(b) Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$x_0 \geq 2 \qquad \text{et} \qquad x_m = \frac{6(x_{m-1}^2 + 1)}{x_{m-1}^2 + 11},\ m \in \mathbb{N}_0\,.$$

Si la suite converge, déterminer sa limite.

Exercice 8 (Géométrologie). Calculer la distance (en km) qui sépare l'observatoire d'Uccle ($50°47'56"$ N, $4°21'45"$ E) et celui de Zurich ($47°22'40"$ N, $8°33'$ E)

L. Simons & F. Bastin – 26 novembre 2013