

0. Compléments sur le calcul intégral

Exercice 1. Calculer (si possible) les intégrales suivantes :

$$(a) \int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|} dx \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 9} \quad (c) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx \quad (d) \int_{\pi/3}^{+\infty} \sin(2x) e^{-x} dx$$

Exercice 2. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

- (a) Représenter le graphique de f dans un repère orthonormé.
(b) Calculer si possible l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{3ix} f(x) dx.$$

Exercice 3. Si $n \in \mathbb{N}$, calcul par récurrence l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \ln^n(x) dx.$$

Exercice 4. La première intégrale eulérienne est la fonction

$$\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[; t \mapsto \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

- (a) Montrer que cette fonction est bien définie.
(b) Montrer que $\Gamma > 0$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(1/2)$.
(c) Vérifier qu'on a la formule de multiplication

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \quad t > 0$$

et en particulier, $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- (d) Montrer que Γ est indéfiniment continûment dérivable et que

$$D^k \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} \ln^k(x) dx, \quad t > 0,$$

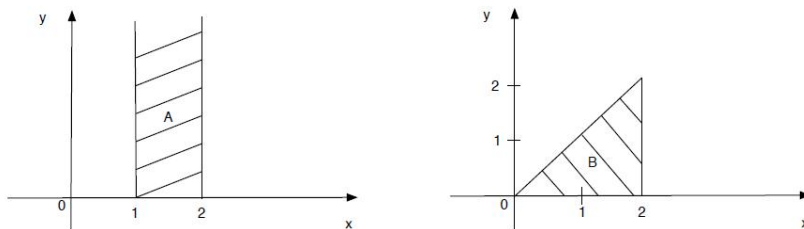
pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.

Exercice 5. On donne la succession d'intégrales simples

$$\int_0^1 \left[\int_1^{e^x} \ln(y) dy \right] dx.$$

- (a) Calculer (si possible) cette succession d'intégrales.
(b) Représenter la partie E du plan sur lequel on intègre.
(c) Permuter l'ordre d'intégration.
(d) La fonction $(x, y) \mapsto \ln(y)$ est-elle intégrable sur E ? Pourquoi? Si elle est intégrable, que vaut alors son intégrale et que représente cette intégrale?

Exercice 6. Soient les ensembles A et B donnés par



Calculer (si possible) les intégrales

$$\iint_A e^{-xy} dx dy, \quad \iint_B x^2 e^{-xy} dx dy \quad \text{et} \quad \iint_A e^{-(x+y)} dx dy.$$

Exercice 7. (a) Soient $a, b > 0$ et soit l'ensemble

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_A (x^3 + y^3) dx dy.$$

(b) Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$. Calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_B \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

(c) Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}$. Calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_C (x + y) dx dy.$$

Exercice 8. Représenter graphiquement dans un repère orthonormé l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

et calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_E \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2} dx dy.$$