2. Extrema libres et sous contraintes

Exercice 1. Déterminer les extrema dans $\mathbb{R}$ des fonctions f et g définies par

$$f(x) = x^3\, e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = (x+1)^2(x-1)^2.$$

Exercice 2. Déterminer les éventuels extrema libres des fonctions suivantes :

$f_1(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\qquad$ $f_2(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$ $\qquad$ $f_3(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$f_4(x,y) = x^2 + y^4$ $\qquad$ $f_5(x,y) = |x| + |y|$ $\qquad$ $f_6(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

$f_7(x,y) = (x + y^2 + 2y)\, e^{2x}$ $\qquad$ $f_8(x,y) = x^3 + 2xy - 2x^2 + y^2$

Exercice 3. Déterminer les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;(x,y) \mapsto ye^{-x}$ sur le rectangle R de sommets de coordonnées $(0,0)$, $(\ln(2),0)$, $(\ln(2),3)$ et $(0,3)$.

Exercice 4. Déterminer les extrema globaux dans le disque unité fermé des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x + y$ et $g(x,y) = x + y^2$.

Exercice 5. Déterminer la valeur du minimum global de la fonction m définie par

$$m(x,y) = 3x + x^2 - 3y - xy + y^2$$

dans les disques

$$R_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le 1\right\} \quad \text{et} \quad R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le 2\right\}$$

Exercice 6. Déterminer la distance entre le point de coordonnées $(0,1)$ et la courbe d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$. Représenter la situation.

Exercice 7. On donne les fonctions f et g explicitement par

$$f(x,y) = xy \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = 4x^2 + y^2.$$

(a) Déterminer les éventuels extrema libres de f.

(b) S'ils existent, déterminer les extrema de f sous la contrainte $g(x,y) = 1$.

(c) S'ils existent, déterminer les extrema de f dans l'ensemble (à représenter)

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge 0 \ \text{ et } \ g(x,y) \le 1\right\}.$$

Exercice 8. (a) Déterminer les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;(x,y) \mapsto x^2y$ sur la partie du plan

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 4\right\}.$$

(b) Déterminer les extrema de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$ dans le disque centré en l'origine et de rayon 3.