

Exercice. Voici ci-dessous l'énoncé d'un exercice ainsi que la solution proposée par un étudiant. Repérer et corriger toutes les erreurs faites par l'étudiant. Expliquer en quoi ce sont des erreurs.

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x} \chi_{]0, +\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1-ix}.$$

Déterminer si possible la transformée de Fourier (positive) de la fonction f et la transformée de Fourier (négative) de la fonction g . Préciser dans chacun des cas s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

- La fonction $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est intégrable en $+\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (limite finie). Donc, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et on peut calculer la transformée de Fourier de f (dans $L^1(\mathbb{R})$).

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^+ f &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{ixy} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{x(iy-1)} dx \\ &= \left[\frac{e^{x(iy-1)}}{iy-1} \right]_0^{+\infty} \quad \text{si } iy-1 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Or, par l'étape, on a } 0 \leq e^{x(iy-1)} \leq e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(iy-1)} = 0.$$

$$= 0 - \frac{1}{iy-1} = \frac{1}{1-iy} \quad \text{si } iy-1 \neq 0.$$

- Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, g est intégrable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^- g &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \frac{1}{1-ix} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \mathcal{F}_x^+ f dx \\ &= \mathcal{F}_y^- (\mathcal{F}_x^+ f) = 2\pi f \quad \text{par le théorème de Fourier} \\ &= 2\pi e^{-x} \chi_{]0, +\infty[} \end{aligned}$$