Compléments de mathématiques générales Année académique 2012-2013

2e Bac Chimie, Géométrologie et Informatique

Révisions – Travail dirigé

Exercice 1. (a) Pour tout $a > 0$, calculer si possible le produit de convolution de la fonction $\chi_{[-a,a]}$ avec elle-même.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx.$$

(c) Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose

$$f_m(x) = \frac{\sin(x - m\pi)}{x - m\pi}.$$

(1) Montrer que la transformée de Fourier de f_m ($m \in \mathbb{Z}$) est nulle en dehors d'un intervalle (à déterminer) indépendant de m.

(2) Montrer que cette suite de fonctions $(f_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est orthogonale.

(3) Calculer la norme de f_m ($m \in \mathbb{Z}$).

Exercice 2. Soit la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

(a) Développer si possible cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.

(b) En déduire la valeur des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4}.$$

Exercice 3. Soient les fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 4xy + x^4, \quad g(x,y) = (x+y)^3, \quad h(x,y) = x^2 y \quad \text{et} \quad i(x,y) = (x^2 + y^2)\, e^{-y}.$$

(a) Déterminer les éventuels extrema libres de f, g et i et préciser s'ils sont globaux ou non.

(b) S'ils existent, déterminer les extrema de f sous la contrainte $h(x,y) = 1$.

(c) S'ils existent, déterminer les extrema de g dans le disque fermé de rayon 1 centré en l'origine.

Exercice 4 (Géométrologie & Informatique). Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1 passant par les points $A = (1, 2, 3)$ et $B = (-1, 0, 2)$ et la droite d_2 passant par les points $C = (0, 1, 7)$ et $D = (2, 0, 5)$.

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan Π parallèle à d_1 et contenant d_2.

(b) Calculer la distance entre d_1 et Π.

(c) Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2.

(d) Déterminer un point P_1 de d_1 et un point P_2 de d_2 tels que la droite passant par P_1 et P_2 soit orthogonale à d_1 et d_2.

Exercice 5 (Informatique). Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$x_0 \geq 2 \qquad \text{et} \qquad x_m = \frac{6(x_{m-1}^2 + 1)}{x_{m-1}^2 + 11},\ m \in \mathbb{N}_0\,.$$

Exercice 6 (Géométrologie). Calculer la distance (en km) qui sépare l'observatoire d'Uccle (50°47′56" N, 4°21′45" E) et celui de Zurich (47°22′40" N, 8°33′ E)

L. Simons & F. Bastin – 22 novembre 2012