

Test de rentrée

Exercice 1. (a) Vous faites du shopping et vous avez un coup de coeur pour une pièce de collection. Celle-ci est cependant un peu chère pour vos économies. Vous savez par ailleurs qu'une augmentation des prix va survenir la semaine qui suit et que cette augmentation sera de l'ordre de 30%. Mais ensuite, ce sera la période des soldes et vous savez que les prix vont alors chuter de 30%. Vous êtes de toute façon décidé à acquérir la pièce ; pour déboursier le moins possible, vous achetez avant l'augmentation de prix ou vous attendez les soldes ? Pourquoi ?

(b) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation

$$2 \cos^2(x) = 5 \sin(x) - 1.$$

(c) Déterminer si les séries suivantes convergent et déterminer la somme des séries convergentes :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]^m, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^m}{m!} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}.$$

Exercice 2. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2(x)} & \text{(b)} \int_0^{\pi/4} \sin(x) \cos(3x) dx & \text{(c)} \int_0^1 \exp(-i\pi x) dx \\ \text{(d)} \int_{-\infty}^0 e^{ix} dx & \text{(e)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} & \text{(f)} \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} \end{array}$$

Exercice 3. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Est-ce que la matrice A est inversible ? Justifier.

(b) Rechercher les valeurs propres de la matrice B . Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, en déterminer une forme diagonale et une matrice qui y conduit.

Exercice 4. Représenter graphiquement l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2x\}$. Calculer (si possible) l'intégrale double

$$\iint_E \frac{dx dy}{x^2 y^2}$$

en choisissant un ordre d'intégration. Permuter ensuite les intégrales et vérifier (en effectuant les calculs) si le résultat change ou non.

Exercice 5. Soit la fonction f (de deux variables réelles) définie par

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right).$$

Donner le domaine de dérivabilité de f et le représenter. Calculer $|x|D_x f(x, y) + |y|D_y f(x, y)$.