1. Transformées de Fourier et produit de convolution

Exercice 1. Si possible, calculer les transformées de Fourier des fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f_1(x) = xe^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x), \quad f_2(x) = e^{ix}e^{-|x|} \quad \text{et} \quad f_3(x) = e^{-|x-1|}.$$

Exercice 2. Soient $a, b \in]0, +\infty[$ et $c \in \mathbb{R}$.

(i) Déterminer si possible les transformées de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = e^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(cx)}{x^2 + a^2}\, dx.$$

(iii) En utilisant le théorème de transfert, calculer la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

(iv) Calculer si possible
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x)\, dx.$$

Exercice 3. (i) Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions f_1 et f_2 (d'une variable réelle) définies par
$$f_1(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sin(x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x).$$

(ii) En déduire les transformées de Fourier des fonctions g_1 et g_2 (d'une variable réelle) définies par
$$g_1(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 1}.$$

Exercice 4. (i) Si possible déterminer le produit de convolution des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

(ii) Même question avec
$$f(x) = e^x\chi_{[1,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x\chi_{[-1,+\infty[}(x).$$

Exercice 5. (i) S'il est défini, déterminer le produit de convolution des fonctions $\chi_{[-1,1]}$ et $\chi_{[-2,2]}$.

(ii) Si possible, calculer
$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin(x)\sin(2x)}{x^2}\, dx.$$

Exercice 6. (i) Si possible, déterminer le produit de convolution des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(ii) Représenter graphiquement les fonctions f, g et $f \star g$.

F. Bastin et L. Demeulenaere – 24 septembre 2015