Année académique 2014-2015
2e Bac Géométrologie et Informatique

2. Compléments sur le calcul intégral

Exercice 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(a) Représenter le graphique de f dans un repère orthonormé.

(b) Calculer si possible l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{3ix}\, f(x)\, dx.$$

Exercice 2. Calculer (si possible) l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln(x)}\, dx$$

si $a, b > -1$.

— Exercices supplémentaires —

Exercice 3. Calculer (si possible) les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{+\infty} \sin(2x)\, e^{-x}\, dx$

Exercice 4. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer si possible (par récurrence) la valeur de l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \ln^n(x)\, dx.$$

Exercice 5. La première intégrale eulérienne est la fonction

$$\Gamma :]0,+\infty[\to]0,+\infty[\; ; \; t \mapsto \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{t-1}\, dx.$$

(a) Montrer que cette fonction est bien définie.

(b) Montrer que $\Gamma > 0$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(1/2)$.

(c) Vérifier qu'on a la formule de multiplication

$$\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t), \quad t > 0$$

et en particulier, $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(d) Montrer que Γ est indéfiniment continûment dérivable et que

$$D^k\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{t-1}\, \ln^k(x)\, dx, \quad t > 0,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.

Exercice 6. On donne la succession d'intégrales simples

$$\int_0^1 \left[\int_1^{e^x} \ln(y)\, dy \right] dx.$$

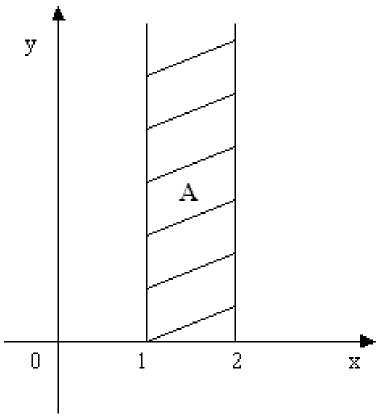
(a) Calculer (si possible) cette succession d'intégrale.

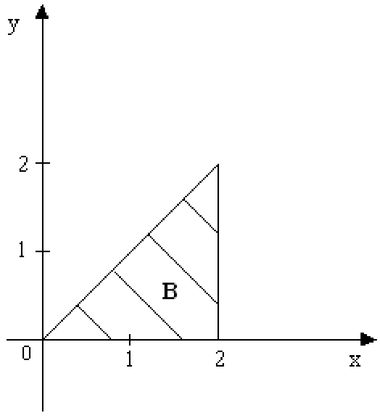
(b) Représenter la partie E du plan sur lequel on intègre.

(c) Permuter l'ordre d'intégration.

(d) La fonction $(x, y) \mapsto \ln(y)$ est-elle intégrable sur E ? Pourquoi ? Si elle est intégrable, que vaut alors son intégrale et que représente cette intégrale ?

Exercice 7. Soient les ensembles A et B donnés par





Calculer (si possible) les intégrales

$$\iint_A e^{-xy}\, dxdy, \qquad \iint_B x^2 e^{-xy}\, dxdy \qquad \text{et} \qquad \iint_A e^{-(x+y)}\, dxdy.$$

Exercice 8. (a) Soient $a, b > 0$ et soit l'ensemble

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_A \left(x^3 + y^3 \right)\, dxdy.$$

(b) Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$. Calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_B \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy.$$

(c) Soit $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1 - x^2}\} \right\}$. Calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_C (x + y)\, dxdy.$$

Exercice 9. Représenter graphiquement dans un repère orthonormé l'ensemble

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < x^2 \right\}$$

et calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_E \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2}\, dxdy.$$