Compléments de mathématiques générales Année académique 2014-2015
2e Bac Géométrologie et Informatique

Révisions – Travail dirigé

Exercice 1. Soit $f \in C_1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable et de dérivée intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit r un nombre réel. Notons F la transformée de Fourier (-) de f. Exprimer les transformées de Fourier (-) des fonctions suivantes en fonction de F :

(a) $x \mapsto f(-x)$	(b) $x \mapsto f(3x)$	(c) $x \mapsto e^{i\pi x} f(x)$
(d) $x \mapsto f(x-r)$	(e) $x \mapsto (f \star f)(x)$	(f) $x \mapsto -i(Df)(x)$.

Exercice 2. (a) Pour tout $a > 0$, calculer si possible le produit de convolution de la fonction $\chi_{[-a,a]}$ avec elle-même.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx.$$

(c) Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose

$$f_m(x) = \frac{\sin(x - m\pi)}{x - m\pi}.$$

(1) Montrer que la transformée de Fourier (-) de f_m ($m \in \mathbb{Z}$) est nulle en dehors d'un intervalle (à déterminer) indépendant de m.
(Suggestion : exprimer f_m au moyen de f_0 et utiliser l'expression de la transformée de Fourier de f_0).

(2) Montrer que cette suite de fonctions $(f_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est orthogonale.

(3) Calculer la norme de f_m ($m \in \mathbb{Z}$).

Exercice 3. Pour tout $a > 0$, calculer si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(x^2+a^2)}\, dx.$$

Exercice 4. Soit la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$ et soit la fonction g définie sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par $g(x) = \sin(12x)$.

(a) Développer si possible la fonction f en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$. Faire de même pour g dans $\mathrm{L}^2([-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}])$. Exprimer vos réponses en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.

(b) En déduire la valeur des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4}.$$

Exercice 5. Soient les fonctions f, g, h et j définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 4xy + x^4, \quad g(x,y) = (x+y)^3, \quad h(x,y) = x^2 y \quad \text{et} \quad j(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-y}.$$

(a) Déterminer les éventuels extrema libres de f, g et j et préciser s'ils sont globaux ou non.

(b) S'ils existent, déterminer les extrema de f sous la contrainte $h(x,y) = 1$.

(c) S'ils existent, déterminer les extrema de g dans le disque fermé de rayon 1 centré en l'origine.

Exercice 6. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1 passant par les points $A(1,2,3)$ et $B(-1,0,2)$ et la droite d_2 passant par les points $C(0,1,7)$ et $D(2,0,5)$.

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan Π parallèle à d_1 et contenant d_2.

(b) Calculer la distance entre d_1 et Π.

(c) Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2.

(d) Déterminer un point P_1 de d_1 et un point P_2 de d_2 tels que la droite passant par P_1 et P_2 soit orthogonale à d_1 et d_2.

Exercice 7 (Informatique). (a) Soit a un paramètre réel strictement positif. Etudier la convergence des suites

$$(a^{1/m})_{m\in\mathbb{N}_0} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{m!}{m^m}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}.$$

(b) Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$x_0 \geq 2 \qquad \text{et} \qquad x_m = \frac{6(x_{m-1}^2+1)}{x_{m-1}^2+11},\ m\in\mathbb{N}_0\,.$$

Si la suite converge, déterminer sa limite.

Exercice 8 (Géométrologie). (a) On reprend les notations du cours théorique concernant la trigonométrie sphérique. Si on pose $s = \frac{a+b+c}{2}$, montrer que

$$\sin^2(A/2) = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(b)\sin(c)}.$$

Rappel : Les formules fondamentales sont

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos(b)\cos(c)+\sin(b)\sin(c)\cos(A)\\ \cos(b) &= \cos(a)\cos(c)+\sin(a)\sin(c)\cos(B)\\ \cos(c) &= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\cos(C).\end{aligned}$$

(b) Calculer la distance (en km) qui sépare l'observatoire d'Uccle ($50°47'56"$ N, $4°21'45"$ E) et celui de Zurich ($47°22'40"$ N, $8°33'$ E)

L. Simons, L. Demeulenaere & F. Bastin – 12 décembre 2014