3. Analyse de Fourier

Exercice 1. En tout point $y \in \mathbb{R}$, calculer si possible
$$\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(xe^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x)\right), \quad \mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(e^{ix}e^{-|x|}\right), \quad \mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(e^{-|x-1|}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(\sin(2x)\chi_{[-1,1]}(x)\right).$$

Exercice 2. Déterminer si possible les transformées de la fonction f définie par $f(x) = e^{-2|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+4}\,dx.$$

Exercice 3. Soient $a, b > 0$. Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}\,dx.$$

Exercice 4. En utilisant le théorème du transfert, calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\sin(x)\,dx.$$

Exercice 5. Déterminer les transformées de Fourier des fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ -e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Exercice 6. On définit les fonction f et g sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = e^{-|x|} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \cos(2\pi x).$$

(a) Ces fonctions appartiennent-elles à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$? Et à $\mathrm{L}^1([0,1])$ et $\mathrm{L}^2([0,1])$?

(b) Calculer $\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}$ et $\|g\|_{\mathrm{L}^2([0,1])}$.

(c) Calculer si possible le produit scalaire dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ des fonctions ifg et if.

Exercice 7. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Calculer si possible le produit de convolution de f et g.

(b) Représenter le graphique des fonctions f, g et $f \star g$.

Exercice 8. (a) Si possible déterminer le produit de convolution des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = e^{x}\chi_{[1,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x\chi_{[-1,+\infty[}(x).$$

(b) Même question avec
$$f(x) = |x| \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 9. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par
$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\,dx, \quad t \in \mathbb{R}$$
et la densité spectrale de puissance de ce signal (PSD) par
$$D_f(y) = \left|\mathcal{F}^-_y f\right|^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$
On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que l'autocorrélation s'écrit
$$E_f = f \star f^s.$$
(b) Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.

(c) Montrer que
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$
(d) Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier (l'une est la transformée de l'autre).

Exercice 10. Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([0,\pi])$ de la fonction f donnée par $f(x) = x$.

Exercice 11. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
(a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f de $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$.

(b) En déduire la valeur des sommes
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

Exercice 12. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin(x)|$.

(b) Déterminer la valeur des sommes
$$S_1 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$
(c) Parmi les trois graphiques ci-dessous, déterminer celui qui représente les premiers termes du développement de f.