4. Trigonométrie sphérique

Exercice 1. A partir des formules fondamentales du triangle sphérique, démontrer

(a) la formule des 5 éléments
$$\sin(b)\cos(C) = \cos(c)\sin(a) - \sin(c)\cos(a)\cos(B),$$

(b) la formule des sinus
$$\sin(b)\sin(C) = \sin(B)\sin(c),$$

(c) et la formule des cotangentes
$$\sin(B)\operatorname{cotg}(C) = \sin(a)\operatorname{cotg}(c) - \cos(a)\cos(b).$$

Exercice 2. Calculer la distance (en km) qui sépare les villes Pékin ($39°54'18"N$, $116°28'54"E$) et Moscou ($55°45'19"N$, $37°34'18"E$).

Exercice 3. Un navire veut se rendre d'un point M_1 ($33°2'S$, $74°3'O$) à un point M_2 ($43°51'S$, $170°45'E$) par le plus court chemin.

(a) Calculer la distance entre ces deux points.

(b) Déterminer l'angle de route initial (angle indiqué sur la boussole par la direction du navire de départ).

(c) Montrer que la latitude maximum que le navire atteint est $56°33'42"S$.

Exercice 4. Quelle est la mesure, en stéradians, de l'angle solide déterminé par un cône circulaire de mesure d'angle θ (radians) au sommet (« angle d'ouverture » du cône) ? En degrés et en radians, quelle est l'amplitude de l'angle d'ouverture d'un cône qui détermine un angle solide d'un stéradian ?

Les angles solides constituent une généralisation des angles plan aux situations dans l'espace. L'angle plan étant défini, dans l'espace bidimensionnel, comme le rapport de la longueur de l'arc sur le rayon d'un cercle, l'**angle solide**, dans l'espace tridimensionnel, est défini de façon analogue comme le rapport de la surface d'une partie d'une sphère sur le rayon au carré. Autrement dit, on définit l'angle solide Ω sur une sphère de rayon R par
$$\Omega = \frac{\mathcal{S}}{R^2}$$
où $\mathcal{S}$ est la surface formée sur la sphère. Un angle solide se mesure en stéradians (sr).

Le **stéradian** est défini comme étant la mesure de l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe, sur la surface de cette sphère, une aire équivalente à celle d'un carré dont le côté est égal au rayon de la sphère. Autrement dit, un angle solide d'un stéradian délimite sur la sphère unité à partir du centre de cette sphère une surface d'aire 1. Pour une sphère complète, l'angle solide vaut donc 4π stéradians, la surface d'une sphère complète de rayon R valant $4\pi R^2$. Le stéradian est une unité sans dimension. Dans la pratique, comme pour le radian, le symbole sr est utilisé lorsque cela s'avère utile plutôt que ne pas mettre d'unité du tout. Par exemple, le regard d'un oeil humain embrasse environ $0,5\,sr$.