4. Suites convergentes

Exercice 1. Soit a est un paramètre réel. Etudier la convergence des suites $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de terme général x_m égal à

(a) $x_m = 2^m$ (b) $x_m = \sqrt[m]{m}$ (c) $x_m = \sqrt[m]{m^2}$ (d) $x_m = \sqrt{m}\left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}\right)$

(e) $x_m = \dfrac{(m!)^2}{(2m)!}$ (f) $x_m = \dfrac{1}{m^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k$ (g) $x_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(m+k)^2}$ (h) $x_m = \dfrac{a^m}{m!}$

Exercice 2. (a) Montrer que si $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite numérique réelle qui converge vers le réel x, alors la suite $(X_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$X_m = \frac{1}{m}(x_1 + \ldots + x_m)$$

converge également vers x.

(b) Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$x_m = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[m]{m}}{m}.$$

Exercice 3. (a) On définit la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la manière suivante

$$x_0 = -2 \quad \text{et} \quad x_{m+1} = \frac{2x_m}{3-x_m}, \quad m \in \mathbb{N}\,.$$

Montrer que les éléments de cette suite sont tous majorés par 0. Etudier ensuite la monotonie et la convergence de cette suite.

(b) La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$x_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_m = \sqrt{2+x_{m-1}}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

converge-t-elle (vers une limite finie) ? Si oui, que vaut cette limite ?

(c) **(Processus de Heron)** Soit $a > 0$. La suite $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$r_0 > 0 \quad \text{et} \quad r_{m+1} = \frac{1}{2}\left(r_m + \frac{a}{r_m}\right), \quad m \in \mathbb{N}$$

converge-t-elle (vers une limite finie) ? Si oui, que vaut cette limite ?

(d) Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$x_0 > 0 \quad \text{et} \quad x_{m+1} = \frac{x_m(2x_m^2+1)}{x_m^2+5}, \quad m \in \mathbb{N}\,.$$