

4. Suites convergentes

Exercice 1. Soit a est un paramètre réel. Etudier la convergence des suites $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de terme général x_m égal à

$$(a) x_m = 2^m \quad (b) x_m = \sqrt[m]{m} \quad (c) x_m = \sqrt[m]{m^2} \quad (d) x_m = \sqrt{m} (\sqrt{m+1} - \sqrt{m})$$

$$(e) x_m = \frac{(m!)^2}{(2m)!} \quad (f) x_m = \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m k \quad (g) x_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(m+k)^2} \quad (h) x_m = \frac{a^m}{m!}$$

Exercice 2. (a) Montrer que si $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ est une suite numérique réelle qui converge vers le réel x , alors la suite $(X_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ définie par

$$X_m = \frac{1}{m} (x_1 + \dots + x_m)$$

converge également vers x .

(b) Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ définie par

$$x_m = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[m]{m}}{m}.$$

Exercice 3. Soit $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. Si l'ensemble $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ est borné, montrer que la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définie par $x_m = a_m 2^{-m}$ converge.

Exercice 4. (a) On définit la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ par récurrence de la manière suivante

$$x_0 = -2 \quad \text{et} \quad x_{m+1} = \frac{2x_m}{3 - x_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Montrer que les éléments de cette suite sont tous majorés par 0. Etudier ensuite la monotonie et la convergence de cette suite.

(b) La suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$x_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_m = \sqrt{2 + x_{m-1}}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

converge-t-elle (vers une limite finie)? Si oui, que vaut cette limite?

(c) (**Processus de Heron**) Soit $a > 0$. La suite $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$r_0 > 0 \quad \text{et} \quad r_{m+1} = \frac{1}{2} \left(r_m + \frac{a}{r_m} \right), \quad m \in \mathbb{N}$$

converge-t-elle (vers une limite finie)? Si oui, que vaut cette limite?

(d) Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$x_0 > 0 \quad \text{et} \quad x_{m+1} = \frac{x_m(2x_m^2 + 1)}{x_m^2 + 5}, \quad m \in \mathbb{N}.$$