5. Séries trigonométriques de Fourier

Exercice 1. (i) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$ de la fonction f donnée par $f(x)=e^x$.
(ii) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m^2+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2+1}.$$

Exercice 2. Développer en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([0,1])$ la fonction f définie par $f(x)=\cos(2\pi x)$.

Exercice 3. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=|x|.$$

(i) Développer en série trigonométrique de Fourier la fonction f dans $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$.
(ii) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}, \qquad \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^4} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^4}.$$

Exercice 4. (i) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$ de la fonction f donnée par $f(x)=|\sin(x)|$.
(ii) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{4m^2-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$