

**Révisions – Travail dirigé****Solution de l'exercice 1.** (a) On a

$$(\chi_{[-a,a]} \star \chi_{[-a,a]})(x) = (2a - |x|)\chi_{[-2a,2a]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) L'intégrale vaut  $\pi$ . (c) La transformée de Fourier (dans  $L^2(\mathbb{R})$ ) de  $f_m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) est nulle en dehors de l'intervalle  $[-1, 1]$ . La norme (dans  $L^2(\mathbb{R})$ ) de  $f_m$  vaut  $\sqrt{\pi}$ .**Solution de l'exercice 2.** La transformée de Fourier évaluée au point  $\xi \in \mathbb{R}$  de la fonction considérée est égale à (a)  $F(-\xi)$ , (b)  $\frac{1}{2}F(\frac{\xi}{2})$ , (c)  $F(\xi - 2)$ , (d)  $(F(\xi))^2$  et (e)  $\xi F(\xi)$ .**Solution de l'exercice 3.** L'intégrale vaut  $\frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-2|a|})$  pour tout  $a \in \mathbb{R}_0$ .**Solution de l'exercice 4.** (a) On a

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos(mx)$$

où la convergence a lieu dans  $L^2([-\pi, \pi])$  et presque partout sur  $[-\pi, \pi]$  (et même partout sur  $[-\pi, \pi]$ ).(b) Les sommes des séries sont respectivement  $-\frac{\pi^2}{12}$  et  $\frac{\pi^4}{90}$ .**Solution de l'exercice 5.** (a) Les fonctions  $f$  et  $g$  n'ont pas d'extremum dans  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $i$  admet un minimum global strict au point  $(0, 0)$  qui vaut 0. (b) Dans l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 1\}$ , la fonction  $f$  admet un minimum local strict au point  $(1, 1)$  qui vaut 5. (c) Dans le disque centré en l'origine et de rayon 1, la fonction  $g$  admet un minimum global au point  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  qui vaut  $-2\sqrt{2}$  et un maximum global au point  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  qui vaut  $2\sqrt{2}$ .**Solution de l'exercice 6 (Géométrie & Informatique).** (a) On a  $\Pi \equiv x - 2y + 2z - 12 = 0$ . (b) La distance entre  $d_1$  et  $\Pi$  vaut 3. (c) On a

$$d_3 \equiv \begin{cases} x = r \\ y = 1 - 2r \\ z = 7 + 2r \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_3 \equiv x = \frac{1-y}{2} = \frac{z-7}{2}.$$

(d) On a  $P_1 = A$  et  $P_2 = D$  (ils sont uniques).**Solution de l'exercice 7 (Informatique).** (a) La première suite converge vers 1 quel que soit  $a > 0$  et la seconde vers 0. (b) La suite  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge vers 3 si  $x_0 > 2$  et vers 2 si  $x_0 = 2$ .**Solution de l'exercice 8 (Géométrie).** La distance entre les deux observatoires est d'environ 487 km.