Révisions – Travail dirigé

Solution de l'exercice 1. La transformée de Fourier (-) évaluée au point $y \in \mathbb{R}$ de la fonction considérée est égale à (a) $F(-y)$, (b) $\frac{1}{3}F(\frac{y}{3})$, (c) $F(y-\pi)$, (d) $e^{-iry}F(y)$, (e) $(F(y))^2$ et (f) $yF(y)$.

Solution de l'exercice 2. (a) On a

$$(\chi_{[-a,a]} \star \chi_{[-a,a]})(x) = (2a - |x|)\chi_{[-2a,2a]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) L'intégrale vaut π. (c) La transformée de Fourier (dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$) de f_m ($m \in \mathbb{Z}$) est nulle en dehors de l'intervalle $[-1,1]$. La norme (dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$) de f_m vaut $\sqrt{\pi}$.

Solution de l'exercice 3. L'intégrale vaut $\frac{\pi}{4a^2}(1-e^{-2a})$ pour tout $a>0$.

Solution de l'exercice 4. (a) On a

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2}\cos(mx)$$

où la convergence a lieu dans $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$ et presque partout sur $[-\pi,\pi]$ (et même partout sur $[-\pi,\pi]$). (b) Les sommes des séries sont respectivement $-\frac{\pi^2}{12}$ et $\frac{\pi^4}{90}$.

Solution de l'exercice 5. (a) Les fonctions f et g n'ont pas d'extrema dans $\mathbb{R}^2$. La fonction j admet un minimum global strict au point $(0,0)$. (b) Dans l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 1\}$, la fonction f admet un minimum local strict au point $(1,1)$. (c) Dans le disque centré en l'origine et de rayon 1, la fonction g admet un minimum global au point $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et un maximum global au point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Solution de l'exercice 6. (a) On a $\Pi \equiv x - 2y + 2z - 12 = 0$. (b) La distance entre d_1 et Π vaut 3. (c) On a

$$d_3 \equiv \left\{\begin{array}{l} x = r \\ y = 1-2r \\ z = 7+2r \end{array}\right., \ r \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_3 \equiv x = \frac{1-y}{2} = \frac{z-7}{2}.$$

(d) On a $P_1 = A$ et $P_2 = D$ (ils sont uniques).

Solution de l'exercice 7 (Informatique). (a) La première suite converge vers 1 quel que soit $a>0$ et la seconde vers 0. (b) La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 3 si $x_0 > 2$ et vers 2 si $x_0 = 2$.

Solution de l'exercice 8 (Géométrologie). (b) La distance entre les deux observatoires est d'environ 487 kilomètres.